Конспект по геометрии

Литература
1) Ханбеков Н. Д. Откуда берётся геометрия? – М., 2020
2) Погорелов А. В. Элементарная геометрия. Изд. 3-е, доп. – М.: Наука, 1977
3) Погорелов А. В. Геометрия 6-10. – М.: Просвещение, 1982

Версия 26.7.2020 г.

Оглавление

§8. Четырёхугольники

§9. Движение. Равенство фигур

§10. Окружность

§11. Подобие треугольников

§12. Теорема Пифагора и её применения

§13. Геометрические построения

§1. Аксиомы I-VI

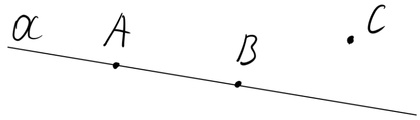
1. Что изучает геометрия

Будем рассматривать два основных вида объектов – *точку* и *прямую.*

Любой объект, состоящий из точек, включая отдельную точку, называется *геометрической фигурой.* Прямая тоже состоит из точек, поэтому является геометрической фигурой.

Геометрия – это наука о свойствах геометрических фигур.

Точки обозначаются прописными латинскими буквами *A, B, C, D, …*
Прямые обозначаются строчными латинскими буквами *a, b, c, d, …*



Если некоторая точка *A* является точкой данной фигуры, мы говорим, что точка *A* *принадлежит* данной фигуре. Принадлежность точки фигуре является примером *отношения* между фигурами.

Будем говорить, что фигура *F* является *частью* фигуры *G* если все точки фигуры *F* являются точками фигуры *G*, но не все точки фигуры *G* являются точками *F*.

Предложение, выражающее свойство геометрической фигуры, называется *теоремой*. Правильность утверждения о свойстве той или иной геометрической фигуры устанавливается путём рассуждения, которое называется *доказательством*. Вспомогательное утверждение, необходимое для доказательства какой-нибудь теоремы, называется *леммой*. Объяснение смысла нового понятия (фигуры или отношения фигур) через уже известные понятия, называется *определением.*

Основные геометрические понятия не имеют определений, а их свойства задаются утверждениями, которые называются *аксиомами*. Эти утверждения не доказываются, а используются при доказательстве теорем.

Плоскость – это фигура, которая состоит из всех точек, для которых выполняются следующие десять аксиом.

2. Принадлежность и пересечение

<u>Аксиома I</u>. Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки. Существуют три точки плоскости, не лежащие на одной прямой.

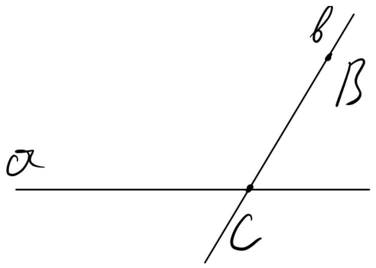
Если точка *A* *принадлежит* прямой *a*, можно также сказать, что прямая *a* *проходит через* точку *A*.

Аксиома II. Каковы бы ни были две точки, существует и притом только одна прямая, проходящая через эти точки.

Две точки однозначно указывают конкретную прямую, поэтому прямую можно обозначать двумя точками, лежащими на ней. Например, прямая *AB*.

Определение 1. Прямые *a* и *b* *пересекаются* в точке *C*, если точка *C* принадлежит и прямой *a*, и прямой *b*. Точка *C* называется *точкой пересечения* прямых *a* и *b*.

Теорема 1. Через каждую точку данной прямой можно провести прямую, пересекающую данную.



Доказательство. Пусть *a* – данная прямая, отметим на ней произвольную точку *C*. По аксиоме I существует точка *B*, не лежащая на прямой а. Проведём через точки *B* и *C* прямую *b* (акс. II). Прямая *b* проходит через точку *B*, не лежащую на прямой *a*, значит, прямая *b* отличается от *a*, но имеет с ней общую точку *C*. Это и означает, что прямые *a* и *b* пересекаются в точке *C* (опр. 1). Теорема доказана.

Введём обозначения: ¬ – *отрицание некоторого утверждения;* ⊗ – *противоречие.*

Теорема 2. Две прямые могут пересекаться только в одной точке.
Доказательство. Допустим, что две прямые пересекаются в двух или более точках (¬). Тогда через эти две точки (или какие-нибудь две точки из всех точек пресечения) проходят две различные прямые (опр. 1), но это противоречит аксиоме II ⊗. Значит две прямые не могут пересекаться в двух и более точках. Следовательно, две прямые могут пересекаться только в одной точке. Теорема доказана.

3. Отрезок

Аксиома III. Из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Если точка *B* *лежит между* точками *A* и *C*, можно также сказать, что точки *A* и *C* *лежат по разные стороны* от точки *B*, или что точка *B* *разделяет* точки *A* и *C*.

Если точка *B* разделяет *A* и *C*, то точка *C* уже не разделяет *A* и *B* (по аксиоме III только одна точка лежит между двумя другими). Поэтому можно дать ещё одно определение.

Определение 2. Точки *A* и *B* *лежат по одну сторону* от точки *C,* если они лежат на одной прямой с *C,* и не разделяются точкой *C.*

Определение 3. Пусть на прямой *a* лежат точки *A* и *B.* *Отрезком AB* называется часть прямой *a,* которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между точками *A* и *B.* Точки *A* и *B* называются *концами отрезка AB.*

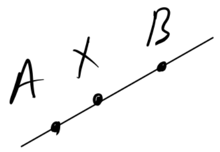
Из определения следует, что концы отрезка не принадлежат отрезку. Если точка *C* принадлежит отрезку *AB,* то говорят также, что отрезок *AB* *содержит* точку *C.*

Аксиома IV. Каковы бы ни были две точки *A* и *B,* существует отрезок *AB.* Каждому отрезку принадлежит положительное действительное число, называемое *длиной* отрезка. Если точка *C* лежит на отрезке *AB,* то длина отрезка *AB* равна сумме длин отрезков *AC* и *BC.*

Определение 4. Отрезки, не обязательно различные, называются *равными*, если равны их длины. Из двух неравных отрезков *больше* тот у которого больше длина, *меньше* тот у которого меньше длина.

Определение 5. Пусть на прямой *a* лежат точки *A* и *B.* *Полупрямой* или *лучом AB* называется часть прямой, которая состоит из всех точек прямой, лежащих вместе с точкой *B* по одну сторону от точки *A.* Точка *A* называется *начальной точкой* полупрямой.

Теорема 3. Отрезок *AB* является частью полупрямой *AB,* то есть каждая точка отрезка *AB* является точкой полупрямой *AB.*



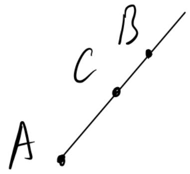
Доказательство. Пусть *X* – некоторая точка на отрезке *AB.* По определению отрезка точка *X* лежит между точками *A* и *B.* Следовательно, точка *A* не разделяет точки *X* и *B* (по аксиоме III только одна точка из трёх лежит между двумя другими и в данном случае это точка *X*), а это и означает, что *X* и *B* лежат по одну сторону от точки *A* (опр. 2). Следовательно, по определению полупрямой точка *X* принадлежит полупрямой *AB.* Теорема доказана.

Аксиома V. Каково бы ни было положительное число *d*, на данной полупрямой из её начальной точки можно отложить и притом только один отрезок длины *d*.

Из аксиом V и IV следует, что *на любой полупрямой можно отложить отрезок, равный данному.*

Теорема 4. Если на полупрямой AB из её начальной точки A отложить отрезок AC, меньший отрезка AB, то точка C будет лежать между точками A и B. Если отложить отрезок AC, больший AB, то точка B будет лежать между A и C.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда отрезок AC меньше AB. Точка A не может лежать между точками B и C, потому что A начальная точка полупрямой AB



(опр. 5 и 2). Если бы точка B лежала между A и C (¬), то по аксиоме IV $AB + CB = AC$, а, значит, $AC > AB$ (по свойству положительных чисел), но по условию теоремы $AC < AB$ ⊗. Значит, точка B не лежит между A и C. Но одна из трёх точек на прямой должна лежать между двумя другими (акс. III), значит, точка C лежит между A и B.

Случай, когда отрезок AC больше AB рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 5. На каждой полупрямой AB есть неограниченное количество точек, как лежащих между точками A и B, так и не лежащих между ними.

Доказательство. На полупрямой AB существуют отрезки $AX_1, AX_2, AX_3, AX_4, \ldots$ длины которых меньше длины AB (акс. VI). При этом по теореме 4 точки $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ лежат между точками A и B. Поскольку существует неограниченное количество чисел больших нуля и меньших длины отрезка AB, то таких точек на прямой тоже неограниченное количество.

Теперь, откладывая на полупрямой AB отрезки $AY_1, AY_2, AY_3, AY_4, \ldots$ длины которых больше длины AB, получаем точки $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \ldots$ По теореме 4 точка B лежит между точками A и Y_1, A и Y_2, A и Y_3, и так далее, значит сами точки $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \ldots$ не лежат между A и B (акс. III). Поскольку существует сколько угодно чисел больших длины AB, то и точек $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \ldots$ тоже сколько угодно. Теорема доказана.

Определение 6. Точка C, принадлежащая отрезку AB, называется *серединой* отрезка AB, если $AC = BC$.

Теорема 6. У любого отрезка есть единственная середина.

Доказательство. Пусть AB – произвольный отрезок. Отложим на луче AB отрезок AC, длина которого равна половине длины AB (акс. V). Так как $AC < AB$, то по теореме 4 точка C лежит между точками A и B, то есть принадлежит отрезку AB (опр. 3). Тогда по аксиоме IV $AB = AC + BC$. Следовательно, $BC = AB - AC = AB - \frac{AB}{2} = \frac{AB}{2} = AC$. Значит, точка C есть середина отрезка AB (опр. 6).

Докажем единственность середины. Допустим, что на отрезке *AB* существует ещё одна середина C_1 (¬). Отрезок *AB* является частью полупрямой *AB* (т. 3), следовательно, точка C_1 принадлежит полупрямой *AB*. По определению середины $AC_1 = BC_1$, а по аксиоме IV $AC_1 + BC_1 = AB$. Из этого следует, что отрезок AC_1 равен половине отрезка *AB*. Но на полупрямой *AB* можно отложить только один отрезок с длиной, равной половине длины *AB* (акс. V) и это отрезок *AC* ⊗. Следовательно, точка *C* является единственной серединой отрезка *AB*. Теорема доказана.

Следствие. Если точка *C* принадлежит прямой *AB* и $AC = CB$, то точка *C* является серединой отрезка *AB*.
Доказательство. Требуется доказать, что точка *C* принадлежит отрезку *AB*. Допустим, что это не так (¬). Тогда точка *C* не лежит между точками *A* и *B* (опр. 3). Если точка *A* лежит между точками *C* и *B*, то по аксиоме IV $CB = CA + AB$, что противоречит условию $AC = CB$. Если точка *B* лежит между *A* и *C*, то $AC = CB + AB$, что также противоречит условию $AC = CB$. Значит, точка *C* лежит между точками *A* и *B* (акс. III) ⊗. Таким образом, точка *C* принадлежит отрезку *AB* и с учётом условия $AC = CB$ является его серединой (опр. 6). Следствие доказано.

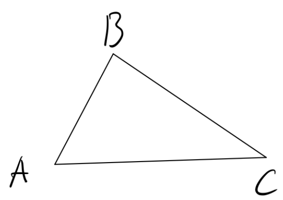
4. Полуплоскость

Определение 7. Отрезок *AB* пересекается с прямой *a,* не совпадающей с прямой *AB,* в точке *C,* если точка *C* принадлежит и отрезку *AB,* и прямой *a*.

Поскольку прямая *AB* и прямая *a* могут пересекаться только в одной точке, то и отрезок *AB* пересекается с прямой *a* только в одной точке.

Определение 8. Пусть дана прямая *a* и не лежащая на ней точка *A. Полуплоскостью* точки *A* называется часть плоскости, которая состоит из точки *A* и всех точек плоскости, кроме точек прямой *a,* для которых соединяющий их с *A* отрезок не пересекает прямую *a.*

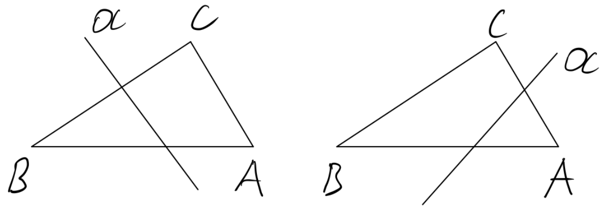
Аксиома VI. Прямая, принадлежащая плоскости, разбивает плоскость на две полуплоскости так, что каждая точка плоскости, кроме точек этой прямой, попадает либо в одну полуплоскость либо в другую.



Определение 9. *Треугольником* называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх попарно соединяющих их отрезков. Эти точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки – *сторонами*.

Треугольник обозначается указанием его вершин, например, ΔABC. Существование треугольника непосредственно следует из аксиом I и IV.

Теорема 7 (Паш, 1882). Если прямая *a,* не проходящая ни через одну из вершин треугольника *ABC,* пересекает его сторону *AB,* то она пересекает и притом только одну из двух других сторон, *BC* или *AC.*

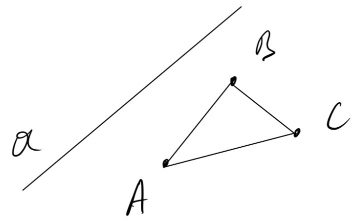


Доказательство. Прямая *a* разбивает плоскость на две полуплоскости. Поскольку отрезок *AB* пересекается с прямой *a,* по определению 8 точка *B* не лежит в полуплоскости точки *A*. Точка *C* лежит либо в полуплоскости точки *A,* либо в полуплоскости точки *B* (акс. VI). Если точка *C* лежит в полуплоскости точки *A,* то по определению 8 отрезок *AC* не пересекается с прямой *a*, а отрезок *BC* пересекается с этой прямой (иначе точка *C* лежала бы ещё и в полуплоскости точки *B*, но это противоречит аксиоме VI). Если точка *C* лежит в полуплоскости точки *B,* то отрезок *BC* не пересекается с прямой *a,* а отрезок *AC* пересекается. В обоих случаях прямая *a* пересекает и притом только один из отрезков *AC* или *BC.* Теорема доказана.

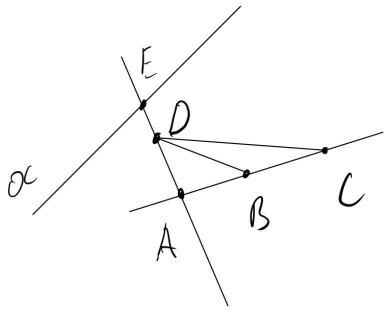
Лемма 1. Если прямая *a* пересекается с прямой *b* в точке *A,* то любой отрезок прямой *a* пересекается с прямой *b* тогда и только тогда, когда этот отрезок содержит точку *A.*
Доказательство. Если отрезок содержит точку *A,* принадлежащую прямой *b,* то он пересекает прямую *b* по определению 7.

Допустим, что некоторый отрезок прямой *a* не содержит точку *A,* но пересекается с прямой *b* в точке *B,* отличной от *A* (¬). Отрезок является частью прямой *a* (опр. 3), следовательно, точка *B* тоже является точкой прямой *a.* Таким образом, прямые *a* и *b* пересекаются в двух точках – *A* и *B,* что противоречит теореме 2 ⊗. Следовательно, отрезок прямой *a* может пересекаться с прямой *b*, только если содержит точку *A.* Лемма доказана.

Теорема 8.1. Если две точки лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекает данную прямую.
Доказательство. Пусть *a* – данная прямая и *A* точка, не лежащая на прямой *a.* Пусть некоторые точки *B* и *C* лежат в полуплоскости точки *A.* Докажем, что отрезок *BC* не пересекается с прямой *a*. Будем рассматривать два случая, когда точки *B* и *C* лежат на одной прямой с точкой *A* и когда они не лежат на одной прямой с точкой *A.*



Сначала рассмотрим случай, когда точки *A, B, C* не лежат на одной прямой. Тогда существует треугольник *ABC* (опр. 9). Если бы прямая *a* пересекала сторону *BC* треугольника, то по теореме 7 она должна была пересекать либо сторону *AB,* либо сторону *AC*. Но поскольку точки *B* и *C* лежат в полуплоскости точки *A*, прямая *a* по определению полуплоскости не пересекает отрезки *AB* и *AC*. Следовательно, не пересекает она и отрезок *BC*.



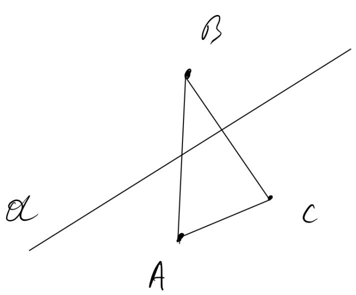
Случай когда все три точки лежат на одной прямой рассматривать немного сложнее. Пусть *E* произвольная точка прямой *a,* не являющаяся точкой пересечения прямых *a* и *AC*. Тогда прямая *AE* не совпадает с прямой *AC*. Отложим на полупрямой *AE* отрезок *AD*, меньший *AE*. По теореме 4 точка *D* лежит между точками *A* и *E*, следовательно, точка *E* не лежит между точками *A* и *D*, и не принадлежит отрезку *AD* (опр. 3). Тогда по лемме 1 отрезок *AD* не пересекает прямую *a*, и, следовательно, точка *D* лежит в полуплоскости точки *A*, но не принадлежит прямой *AC*.

Рассмотрим треугольник *ADC*. Прямая *a* не пересекает отрезок *AD* и не пересекает отрезок *AC*, потому что точки *D* и *C* лежат в полуплоскости точки *A*. Тогда с помощью теоремы 7 заключаем, что прямая *a* не пересекает и отрезок *DC*. Аналогично рассматривая треугольник *ABD* заключаем, что прямая *a* не пересекает и его сторону *DB*. Наконец, рассмотрим треугольник *DBC*. Мы доказали, что прямая *a* не пересекает стороны *DB* и *DC*, а, значит, она не пересекает и сторону *BC*.

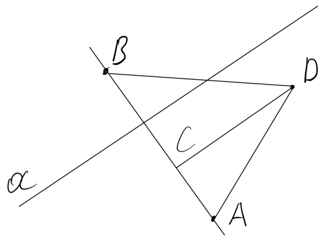
Итак, в обоих случаях если точки *B* и *C* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *a*, то прямая *a* не пересекает отрезок *BC*. Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Если точки *A* и *B* не лежат на прямой *a*, и отрезок *AB* не пересекает прямую *a*, то полуплоскости точек *A* и *B* совпадают, то есть состоят из одних и тех же точек.
<u>Доказательство</u>. Так как отрезок *AB* не пересекается с прямой *a*, можно сказать, что точка *B* лежит в полуплоскости точки *A* (опр. 8). Если некоторая точка *C* лежит в полуплоскости *A*, то по теореме 8.1 отрезок *BC* не пересекается с прямой *a*, а значит, можно сказать, что точка *C* лежит и в полуплоскости точки *B*. Аналогично доказывается обратное, что если точка *C* лежит в полуплоскости точки *B*, то она лежит и в полуплоскости точки *A*. Следствие доказано.

Теорема 8.2. Если две точки лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекает данную прямую.
Доказательство. Пусть *a* – данная прямая, *A* – точка, не лежащая на прямой *a*. Некоторая точка *C* лежит в полуплоскости точки *A*, а точка *B* не лежит. Тогда по определению полуплоскости отрезок *AC* не пересекается с прямой *a*, а отрезок *AB* пересекается. Докажем, что отрезок *BC* пересекается с прямой *a*.



Снова рассмотрим два случая. Первый случай, когда точки *A, B, C* не лежат на одной прямой. Тогда существует треугольник *ABC*, прямая *a* пересекает его сторону *AB* и не пересекает сторону *AC*, значит, по теореме 7 прямая *a* пересекает сторону *BC*.



Рассмотрим случай, когда точки *A, B, C* лежат на одной прямой. Пусть точка *D* лежит в полуплоскости точки *A*, но не на прямой *AC*. Её можно построить точно так же как в доказательстве теоремы 7.1. Значит, существует треугольник *DBA*, в котором прямая *a* не пересекает сторону *DA*, но пересекает сторону *AB*. Тогда прямая *a* пересекает сторону *DB* (т. 7).

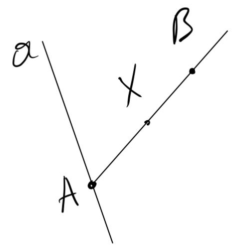
В треугольнике *DBC* прямая *a* пересекает *DB* и, по теореме 8.1, не пересекает сторону *DC* (ведь точки *D* и *C* лежат в полуплоскости точки *A)*. Значит, прямая *a* пересекает сторону *BC* треугольника *DBC* (т. 7). Теорема доказана.

Из теоремы 8.2 следует, что если отрезок *BC* не пересекает прямую *a*, то точки *B* и *C* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *a*. Ведь если бы они лежали в разных полуплоскостях, то отрезок *BC* пересекал бы прямую *a*. Значит, можно сформулировать теорему 8 следующим образом.

Теорема 8. Две точки, не лежащие на данной прямой, принадлежат одной полуплоскости тогда и только тогда, когда соединяющий их отрезок не пересекается с данной прямой.
Доказательство. Следует из теорем 8.1 и 8.2. Теорема доказана.

5. Полупрямая

Теорема 9. Пусть через начальную точку *A* полупрямой *AB* проведена прямая *a*, отличная от прямой *AB*. Тогда полупрямая *AB* состоит из тех и только тех точек прямой *AB*, которые лежат в одной полуплоскости с точкой *B* относительно прямой *a*.
Доказательство. Возьмём произвольную точку *X* на полупрямой *AB*. Точки *X* и *B* лежат по одну сторону от точки *A* (опр. 5). Следовательно, точка *A* не принадлежит



отрезку *XB* (опр. 3). Значит, отрезок *XB* не пересекает прямую *a* (лемма 1). Так как отрезок *XB* не пересекается с прямой *a*, то точка *X* лежит в одной полуплоскости с точкой *B* относительно прямой *a* (т. 8).

Если *X* – точка прямой *AB*, лежащая в одной полуплоскости с точкой *B*, то отрезок *BX* не пересекается с прямой *a* (т. 8). Следовательно, точка *A* не принадлежит отрезку *BX* (лемма 1). Значит, точки *B* и *X* лежат по одну сторону от точки *A*, то есть точка *X* принадлежит полупрямой *AB* (опр. 5). Теорема доказана.

<u>Теорема 10</u>. Если через конец *A* отрезка *AB* провести прямую *a*, отличную от прямой *AB*, то весь отрезок *AB* будет в одной полуплоскости относительно прямой *a*. Именно, он будет в полуплоскости точки *B*.
<u>Доказательство</u>. Следует из того, что отрезок *AB* является частью полупрямой *AB* (теорема 3) и теоремы 9. Теорема доказана.

<u>Лемма 2</u>. Пусть *A* некоторая точка прямой *a*. На прямой *a* существуют точки *B* и *C*, лежащие по разные стороны от точки *A*.
<u>Доказательство</u>. Отметим на прямой *a* ещё одну точку – *B* (акс. I). На полупрямой *BA* отложим отрезок *BC*, больше отрезка *BA* (акс. IV), тогда точка *A* будет лежать между точками *B* и *C* (т. 4). Лемма доказана.

<u>Теорема 11</u>. Точка *A*, лежащая на прямой *a*, разбивает эту прямую на две полупрямые с начальной точкой *A*. Точки одной полупрямой не разделяются точкой *A*, а точки различных полупрямых разделяются этой точкой.
<u>Доказательство</u>. Проведём через точку *A* прямую *b*, отличную от прямой *a* (т. 1). По лемме 2 на прямой *a* существуют точки *B* и *C*, лежащие по разные стороны от точки *A*. Следовательно, точка *A* принадлежит отрезку *BC* (опр. 3), который пересекает прямую *b* в точке *A* (опр. 7). Значит, точки *B* и *C* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *b* (т. 8). Тогда все точки прямой *a*, лежащие в одной полуплоскости с точкой *B* составляют полупрямую *AB*, а все точки прямой *a*, лежащие в полуплоскости точки *C* составляют полупрямую *AC* (т. 9). Прямые *a* и *b* имеют только одну общую точку (т. 2), следовательно, каждая точка прямой *a*, кроме точки *A*, лежит в одной из двух полуплоскостей, на которые разбивает плоскость прямая *b* (акс. VI), и принадлежит либо полупрямой *AB,* либо *AC*.

Пусть точки *E* и *D* лежат на прямой *a* по одну сторону от точки *A*. Тогда точка *A* не лежит между точками *E* и *D* (опр. 2), а, значит, отрезок *ED* не содержит точку *A* (опр. 3) и, следовательно, не пересекается с прямой *b* (лемма 1), следовательно, точки *E* и *D* принадлежат одной полуплоскости относительно прямой *b* (либо полуплоскости точки *B,* либо *C*) (акс. VI), а, значит, и одной полупрямой с начальной точкой *A* – *AB* или *AC* (т. 9). Если точки *E* и *D* разделяются точкой *A*, то отрезок *ED* пересекает прямую *b*, следовательно, точки *E* и *D* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *b*, а, значит, принадлежат разным полупрямым с начальной точкой *A*. Теорема доказана.

Из теоремы 11 следует, что *если на прямой AB точки B и C лежат по одну сторону от точки A, то полупрямые AB и AC совпадают.*

Теорема 12. Если точка *B* лежит на полупрямой *AC*, то отрезок *AB* является частью полупрямой *AC,* то есть любая точка отрезка *AB* принадлежит полупрямой *AC*.
Доказательство. Пусть *X* – произвольная точка отрезка *AB*. Тогда *X* лежит между точками *A* и *B* (опр. 3), значит, точка *A* не лежит между точками *B* и *X* (акс. III), и точки *B* и *X* лежат по одну сторону от точки *A* (опр. 2). Тогда по теореме 11 точки *B* и *X* принадлежат одной и той же полупрямой, то есть полупрямой *AC*. Теорема доказана.

Теорема 13. Пусть на полупрямой *AD* отложены отрезки *AB* и *AC*. Тогда если $AC < AB$, то точка *C* лежит между точками *A* и *B*, если $AC > AB$, то точка *B* лежит между точками *A* и *C*.
Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 4, только при обосновании того, что точка *A* не может лежать между точками *B* и *C* теперь надо сослаться на теорему 11. Теорема доказана.

Определение 9. Полупрямые с общей начальной точкой и состоящие из точек одной прямой называются *дополнительными*.

Из теоремы 11 следует, что *если точка B прямой AB лежит между точками A и C (то есть принадлежит отрезку AC), то полупрямые BA и BC дополнительные.*

Теорема 14. У каждой полупрямой есть дополнительная полупрямая.
Доказательство. По определению полупрямая является частью прямой, и начальная точка полупрямой разбивает эту прямую на две полупрямые (т. 11). Вторая и является дополнительной к первой (опр. 9). Теорема доказана.

Теорема 15. Если точка *X* принадлежит отрезку *AB,* то отрезок *AX* является частью отрезка *AB*, то есть любая точка отрезка *AX* является точкой отрезка *AB*.
Доказательство. *X* – точка отрезка *AB* и, следовательно, *X* лежит на полупрямой *AB* (т. 3). Пусть *Y* – произвольная точка отрезка *AX,* тогда *Y* лежит между точками *A* и *X* (опр. 3), значит, точка *A* не лежит между точками *X* и *Y* (акс. III), и точки *X* и *Y* лежат по одну сторону от точки *A* (опр. 2). Тогда по теореме 11 точки *X* и *Y* принадлежат одной полупрямой, то есть полупрямой *AB.* Следовательно, отрезок *AY* является частью полупрямой *AB* (т. 12).

По аксиоме IV $AB = AX + XB$, следовательно, $AX < AB$. Аналогично доказывается, что $AY < AX$. Из двух неравенств следует, что $AY < AB$. Тогда по теореме 4 точка Y лежит между точками A и B, следовательно, она принадлежит отрезку AB (опр. 3). Теорема доказана.

Теорема 16. Если точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a, то весь отрезок AB лежит в одной полуплоскости относительно прямой a.
Доказательство. Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a, значит, на отрезке AB нет точек, принадлежащих прямой a (т. 11). Пусть X – произвольная точка отрезка AB. По теореме 15 отрезок AX является частью отрезка AB. Так как на отрезке AB нет точек пересечения с прямой a, то и на отрезке AX нет точек пересечения с прямой a, следовательно, точка X лежит в полуплоскости точки A (т. 11). Теорема доказана.

6. Координаты на прямой

Определение 10. Пусть a – действительное число, тогда $–a$ это такое число, что $–a + a = 0$. Число $–a$ называется *противоположным* a.

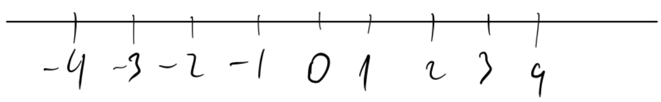
Пример. Если $a = 5$, то $–a = –5$, если $a = –5$, то $–a = 5$, если $a = 0$, то $–a = 0$.

Определение 11. Число, называемое *модулем числа* a (обозначается $|a|$), равно числу a, если a положительное, равно $–a$, если a отрицательное, и равно нулю, если a равно нулю.

Пример. $|5| = 5$; $|–5| = 5$.

Пусть O – некоторая точка прямой, поставим ей в соответствие число 0. Точка O разбивает прямую на две полупрямые, одну из которых мы будем называть «положительной», а другую «отрицательной». Если некоторая точка A принадлежит положительной полупрямой, то поставим ей в соответствие число, равное длине отрезка OA. Если точка A принадлежит отрицательной полупрямой, то поставим ей в соответствие отрицательное число, противоположное длине отрезка OA.

Определение 12. Числа, поставленные в соответствие точкам прямой по указанному правилу, называются *координатами* точек прямой. Точка, которой соответствует число 0, называется *началом координат.*



Теорема 17. Длина отрезка AB равна модулю разности координат точек B и A на прямой AB.

Доказательство. Будем обозначать координату точки A буквой a, а точки B буквой b. То есть требуется доказать, что $AB = |b - a|$.

Заметим, что если $b > a$, то разность $b - a$ положительна. Тогда по определению модуля $|b - a| = b - a$. Если $a > b$, то разность $b - a$ отрицательна и $|b - a| = -(b - a) = -b + a = a - b$.

Рассмотрим все варианты расположения точек A и B относительно начала координат. Если один из концов отрезка AB, например A, является началом координат, то по определению 12 $|b| = AB$, следовательно, $AB = |b - 0| = |b - a|$.

Если точка A принадлежит положительной полупрямой, а B отрицательной, то $a = OA$ и $b = -OB$ (опр. 12), следовательно, длина $OA = a$, длина $OB = -b$. Точки A и B разделяются точкой O, значит, по аксиоме IV $AB = OA + OB = a + (-b) = a - b = |b - a|$. Если точка A принадлежит отрицательной полупрямой, а точка B положительной, то $AB = OA + OB = -a + b = b - a = |b - a|$.

Если точки A и B принадлежат положительной полупрямой, то либо A лежит между O и B, либо B между O и A (точка O не лежит между A и B так как является начальной точкой полупрямой). Если точка B лежит между O и A, то по аксиоме IV $OA = OB + AB$, следовательно, $AB = OA - OB = a - b = |b - a|$. Если A лежит между B и O, то $AB = OB - OA = b - a = |b - a|$.

Если A и B принадлежат отрицательной полупрямой, и B лежит между O и A, то $AB = OA - OB = -a - (-b) = -a + b = b - a = |b - a|$. Если A лежит между O и B, то $AB = OB - OA = -b - (-a) = a - b = |b - a|$. Теорема доказана.

Введение координат на прямой устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между точками прямой и действительными числами. То есть каждому числу соответствует одна точка на прямой, и каждой точке соответствует одно число. Действительно, какова бы ни была точка A прямой, существует отрезок OA определённой длины d (аксиома IV). Если точка A лежит на положительной полупрямой, то ей соответствует число d, если A на отрицательной полупрямой, то ей соответствует $-d$. Наоборот, каково бы ни было число d по аксиоме V можно отложить от точки O отрезок OA с длиной $|d|$ (если d отрицательное, то на отрицательной полупрямой, а если положительное, то на положительной) и получить соответствующую d точку A. Таким образом, мы поставили в соответствие каждой точке число, а каждому числу его точку.

Обратим внимание на разницу в терминологии. В учебниках алгебры отрезком $[a; b]$ называется числовой промежуток, который включает свои концы, то есть числа a и b в алгебре являются частью отрезка $[a; b]$. В геометрии концы отрезка не считаются точками отрезка.

Определение 13. Пусть a и b два числа. Число $\frac{a+b}{2}$ называется *полусуммой* a и b.

Лемма 3. Если $|a| = |b|$, то либо $a = b$ (если a и b одного знака), либо $a = -b$ (если a и b разных знаков).
Доказательство. Рассмотрим четыре случая. 1. Если $a < 0$ и $b < 0$, то по определению модуля $-a = -b$, следовательно, $a = b$. 2. Если $a < 0$ и $b > 0$, то $-a = b$, следовательно, $a = -b$. 3. Если $a > 0$ и $b > 0$, то $a = b$. 4. Если $a > 0$ и $b < 0$, то $a = -b$. Лемма доказана.

Теорема 18. Координата середины отрезка равна полусумме координат его концов.
Доказательство. Пусть точка C – середина отрезка AB. Обозначим a – координату точки A, b – координату точки B, c – координату C. По определению середины $AC = BC$, тогда по теореме 17 $|c - a| = |c - b|$. Числа $(c - a)$ и $(c - b)$ либо одного знака, либо разных. Тогда по лемме 3 либо $c - a = c - b$, либо $c - a = -(c - b)$. В первом случае получается, что $a = b$, что невозможно так как точки A и B различны. Значит, $c - a = -(c - b)$, откуда получаем $c = \frac{a+b}{2}$. Теорема доказана.

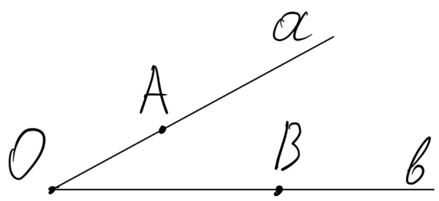
Теорема 19. Пусть AB некоторый отрезок и координата a точки A меньше чем координата b точки B. Тогда если точка C принадлежит отрезку AB, то её координата c принадлежит числовому интервалу $(a; b)$. Обратно, если число c принадлежит интервалу $(a; b)$, то точка C с координатой c принадлежит отрезку AB.
Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Если C точка отрезка AB, то по аксиоме IV $AB = AC + BC$. Тогда по теореме 17 $|b - a| = |c - a| + |c - b|$. Докажем, что это равенство выполняется только если $a < c < b$. Допустим, что c меньше a, а, значит, и b, тогда имеем $b - a = a - c + b - c$, то есть $-a = a - 2c$, что равносильно $a = c$. Но это невозможно, так как точка C не совпадает с точкой A. Допустим, что c больше b, а, значит, и больше a. Тогда $b - a = c - a + c - b$, то есть $b = c$, что также невозможно. Значит, выполняется условие $a < c < b$.

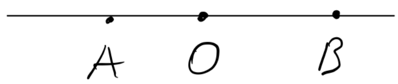
Докажем второе утверждение. Пусть число c принадлежит интервалу $(a; b)$, то есть выполняется неравенство $a < c < b$. Допустим, точка A лежит между C и B. Тогда $BC = AC + AB$, то есть $|c - b| = |c - a| + |b - a|$. Раскрываем модули с учётом условия $a < c < b$, получаем $b - c = c - a + b - a$, или $c = a$. Допустим теперь, что точка B лежит между A и C. Тогда $AC = AB + CB$, то есть $|c - a| = |b - a| + |c - b|$, что при указанном неравенстве означает $c - a = b - a + b - c$, или $c = b$. Таким образом, только точка C может лежать между A и B, следовательно, точка C принадлежит отрезку AB (опр. 3). Теорема доказана.

§2. Аксиомы VII-X

1. Угол

Определение 14. *Углом* называется фигура, которая состоит из двух различных полупрямых с общей начальной точкой. Эта точка называется *вершиной угла*, а полупрямые – *сторонами угла*.



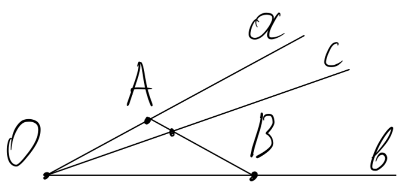


Пусть прямые *a* и *b* пересекаются в точке *O*. Точка *O* разбивает каждую из прямых на две полупрямые (теорема 11). Пусть, например, *OA* – одна из полупрямых прямой *a*, а *OB* – полупрямая прямой *b*. Тогда по определению они образуют угол *AOB*.

Определение 15. Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми, то угол называется *развёрнутым*.

Существование развёрнутых углов следует из существования дополнительных полупрямых. Угол обозначается либо указанием его вершины (∠*O*) либо указанием его сторон (∠*ab*) либо указанием вершины и двух точек на сторонах угла (∠*AOB*) – при этом вершина пишется посередине.

Определение 16. Говорят, что луч *c проходит между* сторонами угла (*ab*), если он исходит из вершины угла (*ab*) и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла. В случае развёрнутого угла, считают, что любой луч, исходящий из его вершины, и отличающийся от его сторон, проходит между сторонами угла.



Теорема 20. Какой бы ни был угол (*ab*), существует луч *c*, проходящий между сторонами (*ab*).

Доказательство. Рассмотрим случай развёрнутого угла с вершиной *O*. Его стороны лежат на одной прямой (опр. 15), и через точку *O* можно провести какую-нибудь прямую *b*, пересекающую прямую развёрнутого угла (т. 1). Точка *O* образует на прямой *b* два луча (т. 11), оба из которых проходят между сторонами развёрнутого угла (опр. 16).

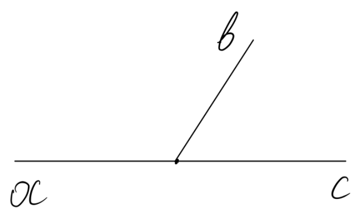
В случае неразвёрнутого угла отметим какую-нибудь точку *A* на стороне *a* и точку *B* на стороне *b* (по теореме 5 на полупрямой есть сколько угодно точек), тогда существует отрезок *AB* (акс. IV). Пусть *C* – некоторая точка отрезка *AB* (по определению отрезка он состоит из точек), проведём через неё прямую *OC* (акс. II). Луч *OC* проходит между сторонами угла (*ab*), так как пересекает отрезок *AB* с концами на сторонах угла (*ab*) (опр. 16). Теорема доказана.

Аксиома VII. Каждому углу принадлежит положительное действительное число, называемое градусной мерой. Развёрнутый угол равен 180°. Если луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*), то градусная мера угла (*ab*) равна сумме градусных мер углов (*ac*) и (*bc*).

Знак ° читается как «градусов» и означает, что некоторое число является градусной мерой угла.

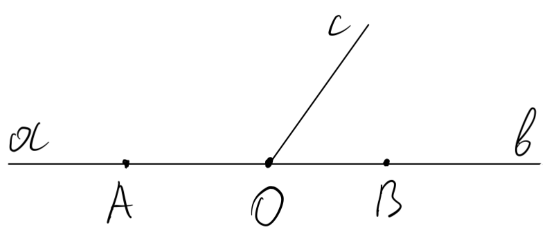
Определение 17. Углы, не обязательно различные, называются *равными*, если равны их градусные меры. Из двух неравных углов *больше* тот у которого больше градусная мера, *меньше* тот у которого меньше градусная мера.

Теорема 21. Градусная мера любого неразвёрнутого угла меньше 180°.
Доказательство. Пусть (*ab*) данный неразвёрнутый угол, тогда полупрямая *b* не является дополнительной к *a* (опр. 15). Обозначим *c* полупрямую дополнительную к *a* (т. 14). Тогда угол (*ac*) развёрнутый (опр. 15) и луч *b* проходит между его сторонами (опр. 16). Следовательно, по аксиоме VII для градусных мер углов выполняется равенство: (*ac*) = (*ab*) + (*bc*). Из этого равенства по свойству положительных чисел следует, что (*ab*) < (*ac*), то есть градусная мера угла (*ab*) меньше градусной меры развёрнутого угла (*ac*), равной 180°. Теорема доказана.

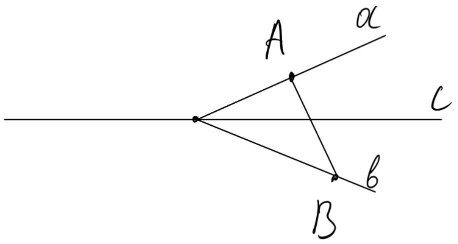


Следствие 1. Любой неразвёрнутый угол меньше развёрнутого.
Следствие 2. Если градусная мера угла равна 180°, то угол является развёрнутым.

Теорема 22. Если луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*), то прямая, содержащая луч *c*, разделяет стороны угла, то есть полупрямые *a* и *b* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч *c*.
Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда угол (*ab*) развёрнутый. Тогда его стороны являются дополнительными полупрямыми (опр. 9), точки которых разделяются вершиной угла (т. 11). Тогда любой отрезок *AB* с концами на разных сторонах углах, содержит вершину угла (опр. 3). Луч *c* по определению 16 исходит из вершины угла. Поэтому отрезок *AB*



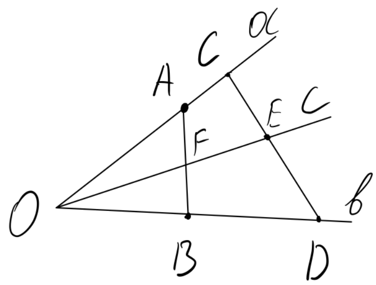
пересекается с прямой, содержащей луч *c*, в вершине угла (лемма 1). Следовательно, точки *A* и *B* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч *c* (т. 8).



Пусть теперь угол (*ab*) неразвёрнутый. Так как луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*), то он пересекает некоторый отрезок *AB* с концами на сторонах угла (опр. 16). Так как отрезок *AB* пересекается с прямой, содержащей луч *c*, то точки *A* и *B* лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой (т. 8).

По теореме 9 полупрямая *a* лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч *c*, именно в полуплоскости где лежит точка *A*. По той же теореме полупрямая *b* лежит в полуплоскости, которой принадлежит точка *B*. Так как точки *A* и *B* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч *c*, то и полупрямые *a* и *b* лежат в разных полуплоскостях и в случае развёрнутого, и в случае неразвёрнутого угла. Теорема доказана.

Теорема 23. Если луч *c* проходит между сторонами неразвёрнутого угла (*ab*), то он пересекает любой отрезок с концами на сторонах угла (*ab*).
Доказательство. Пусть *CD* произвольный отрезок с концами на сторонах угла (*ab*).



По теореме 22 прямая, содержащая луч *c*, разделяет стороны угла, следовательно, точки *C* и *D* лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой. Тогда по теореме 8 прямая, содержащая луч *c*, пересекает отрезок *CD* в некоторой точке *E*. Докажем, что точка *E* лежит на луче *c*, а не на дополнительном к нему луче.

Если луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*) то по определению он пересекает некоторый отрезок *AB* с концами на сторонах угла. Обозначим их точку пересечения *F*.

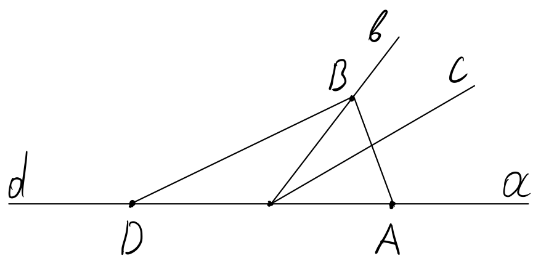
По теореме 9 луч *a* лежит в одной полуплоскости относительно прямой *OD* (*O* – это вершина угла). Значит точки *A* и *C* лежат в одной полуплоскости. Тогда по теореме 10 отрезки *AB* и *CD* тоже лежат в одной полуплоскости относительно прямой *OD* (в полуплоскости своих концов *A* и *C*). Значит, точки *F* и *E* лежат в одной полуплоскости относительно *OD*.

Допустим, что точка *E* лежит на полупрямой дополнительной к *c* (¬). Тогда точки *E* и *F* разделяются точкой *O* (т. 11), и тогда эти точки лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *OD* (т. 8), что противоречит тому, что они лежат в одной полуплоскости ⊗. Значит, точка *E* лежит на луче *c*. Теорема доказана.

Аксиома VIII. Каково бы ни было положительное число α, меньшее 180, от данной полупрямой в данную полуплоскость (относительно прямой, содержащей полупрямую) можно отложить и притом только один угол с градусной мерой α.

Градусные меры углов часто обозначают греческими буквами α (альфа), β (бета), γ (гамма), θ (тета), ϕ (фи) и т. д.

Теорема 24. Если от полупрямой *a* отложить в одну полуплоскость углы (*ab*) и (*ac*), то либо луч *b* проходит между сторонами угла (*ac*), либо луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*).



Доказательство. Обозначим через *d* полупрямую, дополнительную к полупрямой *a* (т. 14). Углы (*db*) и (*dc*) различны и отложены в одну полуплоскость, значит, они не равны (акс. VIII). Следовательно, один из них меньше другого (опр. 17). Пусть, например, угол (*db*) меньше угла (*dc*). Отметим на полупрямых *a, b* и *d* точки *A, B, D* (т. 5). Тогда начальная точка лучей *a, b* и *c* лежит на отрезке *AD* (т. 11).

Прямая, содержащая луч *c*, пересекает сторону *AD* треугольника *DAB*. Поэтому по теореме 7 она пересекает либо сторону *DB* либо сторону *AB*. Точка пересечения лежит на луче *c*, потому что отрезки *DB* и *AB* лежат в полуплоскости точки *B* относительно прямой *DA* (т. 10), а точка *B* лежит на луче *b*, который по условию лежит в одной полуплоскости с лучом *c*. Таким образом, луч *c* пересекает либо отрезок *DB,* либо отрезок *AB*.

Если бы луч *c* пересекал отрезок *DB* (¬), то он проходил бы между сторонами угла (*db*) (опр. 16). Тогда по аксиоме VII *(dc)* + *(cb)* = *(db)*, а значит $\angle$(*dc*) < $\angle$(*db*), но мы рассматриваем случай, когда $\angle$(*db*) < $\angle$(*dc*) ⊗. Поэтому луч *c* не пересекает отрезок *DB*, а, значит, пересекает отрезок *AB*. Но это и означает, что луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*) (опр. 16).

В случае когда $\angle$(*dc*) < $\angle$(*db*) ход доказательства аналогичен. Теорема доказана.

Теорема 25. Если от полупрямой *a* отложить в одну полуплоскость углы (*ab*) и (*ac*), такие что угол (*ac*) меньше угла (*ab*), то луч *c* будет проходить между сторонами угла (*ab*).
Доказательство. По теореме 24 либо луч *b* проходит между сторонами угла (*ac*), либо луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*). Допустим, что луч *b* проходит между сторонами угла (*ac*) (¬). Тогда по аксиоме VII *(ab) + (bc) = (ac)*, а, значит, $\angle(ab) < \angle(ac)$, но по условию $\angle(ac) < \angle(ab)$ ⊗. Следовательно, луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*). Теорема доказана.

Определение 18. Луч *c*, проходящий между сторонами угла (*ab*), называется *биссектрисой* угла (*ab*), если (*ac*) = (*bc*).

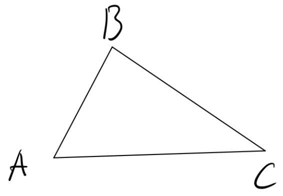
Лемма 4. Если луч *c* проходит между сторонами угла *(ab)*, то луч *c* лежит в одной полуплоскости с лучом *b* относительно прямой, содержащей луч *a*.
Доказательство. Луч *b* лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч *a* (т. 9). По определению луч *c* пересекает отрезок *AB* с концами на сторонах угла *(ab)* в некоторой точке *E*. Пусть точка *B* лежит на луче *b*. Тогда весь отрезок *AB* лежит в полуплоскости точки *B* (т. 10), а, значит, в полуплоскости луча *b* относительно прямой, содержащей луч *a*. Тогда и точка *E* лежит в этой полуплоскости, а, значит, в ней лежит и луч *c,* проходящий через точку *E* (т. 9). Таким образом, луч *c* лежит в одной полуплоскости с лучом *b*. Лемма доказана.

Теорема 26. У любого угла есть единственная биссектриса.
Доказательство. Пусть (*ab*) данный угол. Отложим от полупрямой *a* в полуплоскость луча *b* угол (*ac*), градусная мера которого равна половине градусной меры угла (*ab*) (акс. VIII). Так как $\angle(ac) < \angle(ab)$, то по теореме 25 луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*). Тогда *(ab) = (ac) + (bc),* следовательно, $(bc) = (ab) - (ac) = (ab) - \frac{(ab)}{2} = \frac{(ab)}{2} = (ac)$. Таким образом луч *c* – биссектриса угла (*ab*) (опр. 18).

Докажем единственность биссектрисы. Допустим, что существует ещё один луч c_1, являющийся биссектрисой угла *(ab)* (¬). Тогда по определению биссектрисы $(ac_1) = (bc_1)$, а по аксиоме VII $(ac_1) + (bc_1) = (ab)$. Из этого следует, что угол (ac_1) равен половине угла *(ab)*. Лучи *b, c* и c_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч *a* (лемма 4), следовательно, углы *(ac)* и (ac_1) равны и отложены от полупрямой *a* в одну полуплоскость, что противоречит аксиоме VIII ⊗. Значит, луч *c* является единственной биссектрисой угла *(ab)*. Теорема доказана.

2. Равенство треугольников

Определение 9. *Треугольником* называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх попарно соединяющих их отрезков. Эти точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки – *сторонами*.

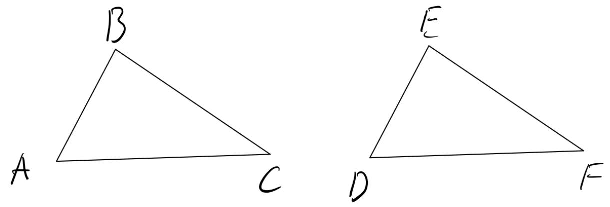


Треугольник обозначается указанием его вершин, например, ΔABC. Существование треугольника непосредственно следует из аксиом I и IV.

<u>Определение 19</u>. *Углом треугольника ABC при вершине A* называется угол, образованный лучами *AB* и *AC*. Углы при вершинах *B* и *C* определяются аналогично.

Для удобства речи можно сказать, что угол при вершине *A* это угол *между сторонами AB* и *AC*, угол при вершине *B* это угол между сторонами *BC* и *BA*, и так далее. Будем говорить, что угол при вершине треугольника *лежит против стороны,* для которой эта вершина не является концом. Например, угол при вершине *A* лежит против стороны *BC*, угол при вершине *B* лежит против стороны *AC*, угол при вершине *C* лежит против стороны *AB*. Можно сказать и наоборот, что сторона *BC* лежит против угла *A* и так далее.

<u>Определение 20</u>. Треугольники *ABC* и *DEF*, не обязательно различные, называются *равными,* если стороны одного треугольника можно приравнять к сторонам другого так, что каждая сторона участвует в одном и только одном верном равенстве, например, $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$, и при этом углы, лежащие против приравненных сторон, тоже равны друг другу, то есть $\angle C = \angle F$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$.



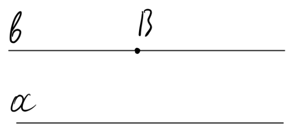
Приравненные стороны (углы) также называют *соответствующими* (или просто равными) сторонами (углами).

<u>Аксиома IX</u> (первый признак равенства треугольников). Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

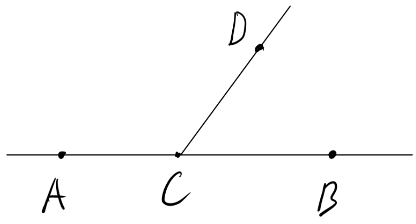
3. Параллельные прямые

<u>Определение 21</u>. Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Обозначение: $a \parallel b$.



Аксиома X. Через точку, не лежащую на данной прямой, на плоскости может проходить не более одной прямой, параллельной данной.



Пусть C – точка на прямой AB, лежащая между точками A и B, а D – точка не лежащая на прямой AB. Построим луч CD и получим два угла ACD и BCD у которых сторона CD общая, а две другие стороны CA и CB являются дополнительными полупрямыми, так как точки A и B этих полупрямых разделяются начальной точкой C.

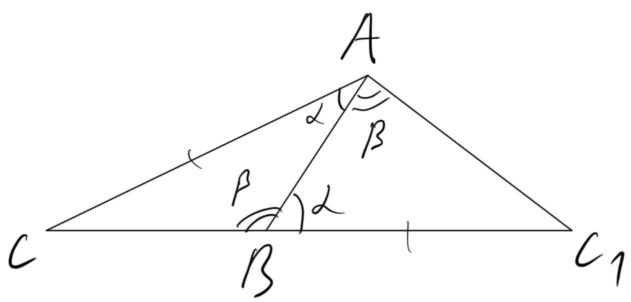
Определение 22. Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.

Из теоремы 14 следует, что *у каждого неразвёрнутого угла есть смежный с ним угол.* Действительно, если DCB – неразвёрнутый угол и CA – полупрямая, дополнительная к CB, то угол DCA по определению смежный с углом DCB.

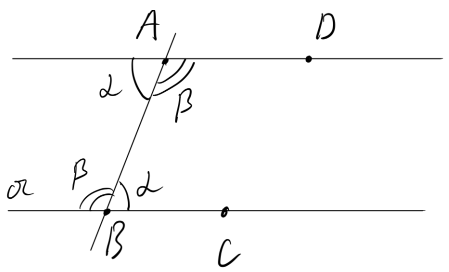
Теорема 27. Сумма смежных углов равна 180°.
Доказательство. Пусть ACD и BCD данные смежные углы. Так как CA и CB дополнительные полупрямые, они образуют развёрнутый угол (опр. 15). Луч CD проходит между сторонами этого развёрнутого угла (опр. 16). Тогда по аксиоме VII сумма углов ACD и BCD равна 180°. Теорема доказана.

Следствие 1. Если градусная мера одного из смежных углов равна α, то градусная мера второго угла равна $180° - \alpha$.
Следствие 2. Если два угла равны, то смежные с ними углы тоже равны.

Лемма 5. Сумма любых двух углов треугольника не равна 180°.



Доказательство. Пусть ABC данный треугольник. Допустим, что сумма его углов при вершинах A и B равна 180° (¬). Обозначим α градусную меру угла BAC и β градусную меру угла ABC. Таким образом $\alpha + \beta = 180°$. Отложим на полупрямой дополнительной к BC отрезок BC_1, равный AC. Углы ABC и ABC_1 являются смежными (опр. 22), значит, $\angle ABC_1 = 180° - \beta = \alpha$ (след. 1 из т. 27). В треугольниках ABC и BAC_1 $AC = BC_1$, $AB = BA$, $\angle BAC = \angle ABC_1$, следовательно, по аксиоме IX $\Delta ABC = \Delta BAC_1$. По определению равных треугольников, их углы, лежащие против равных сторон, равны. Значит $\angle BAC_1 = \angle ABC = \beta$.



Точки C и C_1 лежат на дополнительных полупрямых и, следовательно, разделяются точкой B (т. 11). Тогда по определению отрезка точка B принадлежит отрезку CC_1. Луч AB пересекает отрезок CC_1 в точке B, значит, он проходит между сторонами угла CAC_1 (опр. 16). Тогда по аксиоме VII $\angle CAC_1 = \angle CAB + \angle BAC_1 = \alpha + \beta = 180°$. Следовательно, угол CAC_1 является развёрнутым (след. 2 из т. 21). По определению развёрнутого угла полупрямые AC и AC_1 являются дополнительными, то есть состоят из точек одной прямой. Таким образом, точка C_1 принадлежит прямой AC. Прямая AC не совпадает с прямой BC, потому что точка A не лежит на прямой BC по определению треугольника ABC. Получается, что две различные прямые AC и BC пересекаются в двух точках C и C_1, что противоречит теореме 2 ⊗. Значит, сумма углов A и B не равна 180°. Лемма доказана.

Теорема 28. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной.
Доказательство. Пусть a – данная прямая, и A – точка не лежащая на прямой a. Отметим на прямой a две точки B и C, и проведём прямую AB (акс. I и II). Отложим от полупрямой AB в полуплоскость точки C угол BAD с градусной мерой, равной $180° - \angle ABC$ (акс. VIII). Мы утверждаем, что прямые BC и AD параллельны.

Обозначим α градусную меру угла ABC, и β градусную меру угла BAD. Тогда $\beta = 180° - \alpha$. Заметим, что угол смежный с углом ABC равен $180° - \alpha$, то есть равен β, а угол смежный с углом BAD равен $180° - \beta = \alpha$ (след. 1 из т. 27).

Допустим, что прямые BC и AD пересекаются в некоторой точке E (¬). Точка E не лежит на прямой AB, потому что у прямых AB и BC не может быть двух общих точек (т. 2). Значит, точка E лежит либо на полупрямых AD и BC, либо на дополнительных к ним, в зависимости от того в какой полуплоскости относительно прямой AB она оказалась. Тогда существует треугольник ABE, у которого сумма углов EAB и EBA равна $\alpha + \beta = 180°$, не зависимо от того в какой полуплоскости относительно AB лежит точка E. А это противоречит лемме 5 ⊗. Следовательно прямые BC и AD не могут пересекаться, то есть являются параллельными. Теорема доказана.

Из теоремы 28 и аксиомы X следует, что *через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести и при том только одну прямую, параллельную данной.*

Теорема 29. Пусть прямая a параллельна прямой b. Тогда все точки прямой a лежат в одной полуплоскости относительно прямой b.
Доказательство. Пусть A и B произвольные точки прямой a. Прямая a параллельна b, значит, эти прямые не имеют общих точек (опр. 21). Отрезок AB состоит из точек

прямой *a* (опр. 3), значит, он тоже не имеет общих точек с прямой *b*, то есть не пересекается с этой прямой. Значит, по теореме 8 точки *A* и *B* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *b*. Теорема доказана.

4. Анализ аксиоматики

Пространственные аксиомы.

Аксиома C_1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

Аксиома C_2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Аксиома C_3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

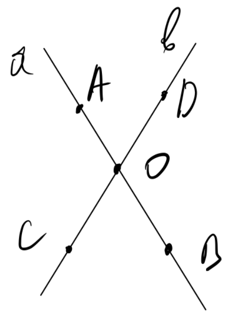
Перечислим основные (неопределяемые) понятия аксиоматики.
Основные фигуры: точка, прямая, плоскость.
Основные отношения: принадлежность прямой, принадлежать плоскости, лежать между, иметь длину, иметь градусную меру.

Принадлежность точки прямой не определяется, поэтому является основным понятием, а вот принадлежность точки отрезку или полупрямой имеют определение. Например, точка принадлежит отрезку *AB* если она лежит между точками *A* и *B*. Поэтому принадлежность отрезку/полупрямой не является основным понятием.

Длина и градусная мера не относятся к основным понятиям, потому что известен их смысл – это числа, соответствующие отрезку (углу). А вот как именно образовано соответствие нам не известно, так как его существование задано аксиомами. Поэтому иметь длину и иметь градусную меру – основные понятия.

§3. Углы

1. Вертикальные углы



Пусть прямые *a* и *b* пересекаются в точке *O*. Точка *O* разбивает каждую из прямых на две полупрямые. Пусть, например, *OA* и *OB* – полупрямые прямой *a*, а *OD* и *OC* – полупрямые прямой *b*. Тогда стороны углов *AOD* и *COB* являются дополнительными полупрямыми.

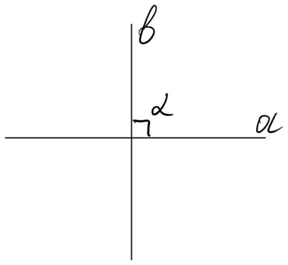
Определение 23. Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

Теорема 30. Вертикальные углы равны.

Доказательство. Пусть *AOD* и *COB* – данные вертикальный углы. Тогда угол *DOB* является смежным и углу *AOD*, и углу *COB* (опр. 22), следовательно, $\angle DOB + \angle AOD = 180°$, и $\angle DOB + \angle COB = 180°$ (т. 27). Это возможно только если $\angle AOD = \angle COB$, то есть вертикальные углы равны. Теорема доказана.

2. Прямой угол. Перпендикулярные прямые

Определение 24. Угол, равный 90°, называется прямым углом.



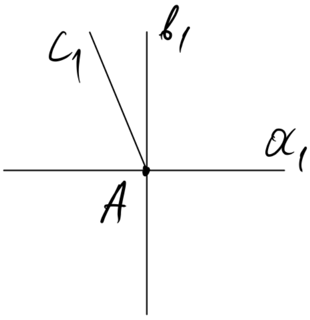
Из теоремы 27 следует, что *угол смежный прямому углу есть прямой угол.*

Пусть *a* и *b* – две пересекающиеся прямые. Полупрямые этих прямых образуют четыре неразвёрнутых угла. Пусть *α* – один из этих углов. Тогда любой из остальных трёх углов будет либо смежным углу *α,* либо вертикальным углу *α.* Отсюда следует, что если один из углов прямой, то остальные углы тоже прямые. В этом случае мы говорим, что *прямые пересекаются под прямым углом.*

Определение 25. Две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Обозначение: $a \perp b$.

Теорема 31. Через каждую точку прямой можно провести и притом только одну перпендикулярную к ней прямую.



Доказательство. Пусть *a* – данная прямая и *A* – данная точка на ней. Обозначим через a_1 одну из полупрямых прямой *a* с начальной точкой *A* (т. 11). Отложим от полупрямой a_1 угол (a_1b_1), равный 90° (акс. VIII). Тогда прямая, содержащая луч b_1, будет перпендикулярна прямой *a* (опр. 25).

Допустим, что кроме построенной прямой, существует другая прямая, тоже проходящая через точку *A* и перпендикулярная прямой *a* (¬). Обозначим c_1 полупрямую этой прямой с начальной точкой *A* и лежащую в одной полуплоскости с лучом b_1 (т. 9 и 11).

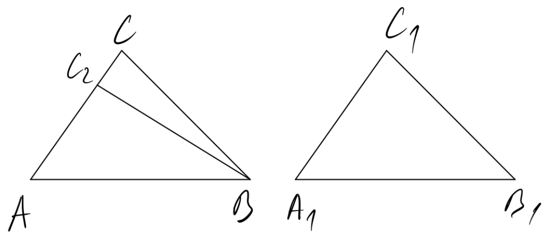
Углы (a_1b_1) и (a_1c_1), равные по 90° каждый (опр. 25), отложены в одну полуплоскость от полупрямой a_1. Но по аксиоме VIII от полупрямой a_1 в данную полуплоскость можно отложить только один угол, равный 90° ⊗. Следовательно, через точку *A* проходит единственная прямая, перпендикулярная прямой *a*. Теорема доказана.

§4. Равенство треугольников

1. Второй признак равенства треугольников

<u>Теорема 32</u>. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

<u>Доказательство</u>. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B =$



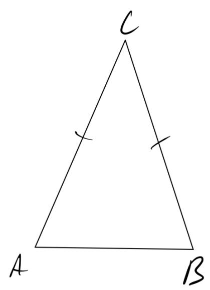
$\angle B_1$. Докажем, что в этом случае $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, то есть $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$. Если у треугольников $AC = A_1C_1$, то они равны по первому признаку равенства (акс. IX). Допустим, что $AC \neq A_1C_1$ (¬). Тогда либо $AC > A_1C_1$, либо $AC < A_1C_1$ (свойство чисел). Пусть для определённости $AC > A_1C_1$.

Отложим на полупрямой AC отрезок AC_2, равный A_1C_1 (акс. V). Рассмотрим треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC_2, у них $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$ по условию теоремы, а $AC_2 = A_1C_1$ по построению, следовательно, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC_2$ по первому признаку равенства (акс. IX). Тогда $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC_2$ (опр. 20), и, поскольку $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$ по условию теоремы, получаем, что $\angle ABC = \angle ABC_2$.

Так как $AC > A_1C_1$ и $AC_2 = A_1C_1$, то $AC_2 < AC$. Тогда по теореме 4 точка C_2 лежит между A и C, и, следовательно, точка C_2 принадлежит отрезку AC (опр. 3). Луч BC_2 проходит между лучами BA и BC, так как пересекает отрезок AC в точке C_2 (опр. 16). Значит, по аксиоме VII $\angle ABC = \angle ABC_2 + \angle CBC_2$, следовательно, угол ABC_2 меньше угла ABC, что противоречит равенству этих углов ⊗. Значит, $AC = A_1C_1$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

2. Равнобедренный треугольник

Пусть (ab) – некоторый угол с вершиной C. Отложим на сторонах этого угла равные отрезки CA и CB. Тогда получим треугольник ABC у которого две стороны равны.



<u>Определение 26</u>. Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами,* а третья сторона называется *основанием* треугольника.

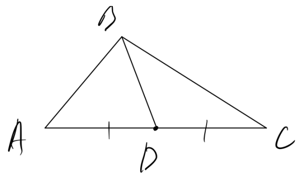
Теорема 33. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Именно, если $AC = BC$ в треугольнике ABC, то $\angle A = \angle B$.

Доказательство. По условию $CA = CB$, $CB = CA$ и $\angle C = \angle C$, следовательно, $\Delta CAB = \Delta CBA$ (акс. IX). Из равенства треугольников следует, что $\angle A = \angle B$ (опр. 20). Теорема доказана.

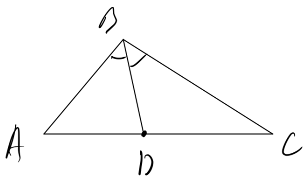
Теорема 34. Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный. Именно, если $\angle A = \angle B$ в треугольнике ABC, то $AC = BC$.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = \angle B$, тогда $\angle B = \angle A$ и $AB = BA$, следовательно, $\Delta ABC = \Delta BAC$ по второму признаку (т. 32). Из равенства треугольников следует, что $AC = BC$ (опр. 20). Теорема доказана.

3. Медиана, биссектриса и высота

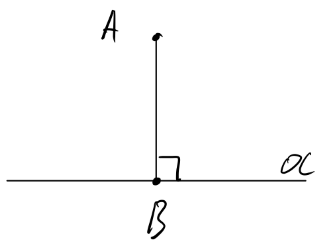


Определение 27. *Медианой треугольника*, проведённой из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны.

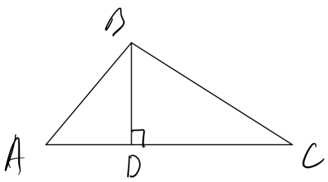


Определение 28. *Биссектрисой треугольника*, проведённой из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне.

Из теоремы 6 следует, что *у любого треугольника есть три медианы.* Из теорем 26 и 23 следует, что *у любого треугольника есть три биссектрисы.*



Определение 29. *Перпендикуляром* к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, имеющий своим концом их точку пересечения. Этот конец отрезка называется *основанием* перпендикуляра.

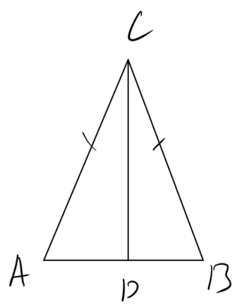


Определение 30. *Высотой* треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведённой из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника.

Количество высот в треугольнике будет установлено позже.

Теорема 35. В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой.

<u>Доказательство</u>. Пусть *ABC* – данный равнобедренный треугольник с основанием *AB*. Пусть *CD* – медиана, проведённая к основанию, тогда точка *D* – середина отрезка *AB* (опр. 27), и по определению *D* принадлежит отрезку *AB*, то есть лежит между точками *A* и *B* (опр. 3). Тогда точки *D* и *B* лежат по одну сторону от *A*, следовательно, лучи *AD* и *AB* совпадают (следствие т. 11), аналогично совпадают лучи *BD* и *BA*. Значит, совпадают углы *CAD* и *CAB*, *CBD* и *CBA*.



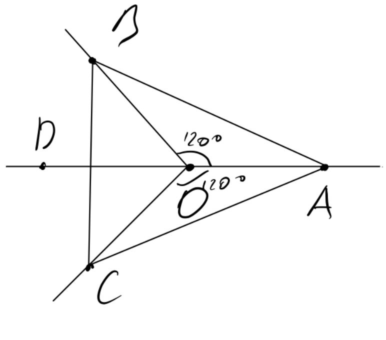
Рассмотрим треугольники *CAD* и *CBD*, у них *AC* = *BC* так как треугольник *ABC* равнобедренный (опр. 26), $\angle CAD = \angle CBD$ по теореме 33, *AD* = *BD* так как *D* – середина *AB* (опр. 6). Следовательно, $\Delta CAD = \Delta CBD$ по первому признаку (акс. IX). Из равенства треугольников следует, что $\angle ACD = \angle BCD$ и $\angle ADC = \angle BDC$ (опр. 20).

Луч *CD* проходит между сторонами угла *ACB,* так как пересекает отрезок *AB* в точке *D* (опр. 16). Тогда из равенства углов *ACD* и *BCD* следует, что *CD* – биссектриса (опр. 28). Точка *D* принадлежит отрезку *AB* (опр. 6), следовательно, точки *A* и *B* разделяются точкой *D* (опр. 3), а, значит, полупрямые *DA* и *DB* являются дополнительными (т. 11 и опр. 9). Тогда углы *ADC* и *BDC* – смежные (опр. 22) и в сумме равны 180° (т. 27). Так как эти углы равны, то равны их градусные меры (опр. 17), и градусная мера каждого из них равна 180°/2 = 90°, то есть прямые *AB* и *CD* перпендикулярны (опр. 25), следовательно, *CD* – перпендикуляр к прямой *AB* (опр. 29), а, значит, и высота треугольника *ABC* (опр. 30). Теорема доказана.

Поскольку из вершины треугольника исходит только одна биссектриса, из теоремы 35 следует, что *в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.*

4. Равносторонний треугольник

Пусть *OA* некоторая полупрямая. Отложим от этой полупрямой в разные полуплоскости углы равные 120° и на сторонах этих углов отложим отрезки *OB* и *OC*, равные отрезку *OA*. Обозначим *OD* полупрямую, дополнительную к *OA*. Углы *BOD* и *COD* смежные углам, равным 120°, значит, каждый из них равен 60°. Прямая *OA* разделяет стороны угла *BOC*, следовательно, отрезок *BC* пересекает эту прямую, причём точка пересечения лежит на полупрямой *OD* (иначе угол *BOC* был бы равен 240°). Значит, луч *OD* проходит между сторонами угла *BOC* и угол *BOC* равен сумме углов *BOD* и *COD*, то есть



120°. Треугольники *BOA*, *AOC* и *BOC* равны по первому признаку равенства, следовательно, равны и стороны *BA*, *BC* и *AC* треугольника *ABC*.

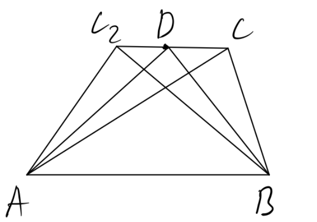
Определение 31. Треугольник у которого все три стороны равны, называется *равносторонним*.

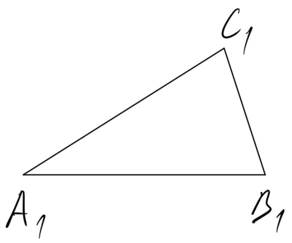
Теорема 36. В равностороннем треугольнике все три угла равны. Обратно, если в треугольнике все три угла равны, то этот треугольник равносторонний.
Доказательство. Пусть *ABC* – равносторонний треугольник. Из равенства сторон *AB* и *AC* следует равенство углов *B* и *C*, а из равенства сторон *AC* и *BC* следует равенство углов *A* и *B* (т. 33). Значит, все три угла равностороннего треугольника равны.

Пусть в треугольнике *ABC* все углы равны. Из равенства углов *A* и *B* следует равенство сторон *AC* и *BC*, а из равенства углов *B* и *C* следует равенство сторон *AB* и *AC* (т. 34), значит, все три стороны треугольника *ABC* равны, то есть треугольник *ABC* равносторонний (опр. 31). Теорема доказана.

5. Третий признак равенства треугольников

Теорема 37. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
Доказательство. Пусть у треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.





Если $\angle A = \angle A_1$ или $\angle B = \angle B_1$, то треугольники равны по первому признаку равенства треугольников (акс. IX). Допустим, что у данных треугольников $\angle A \neq \angle A_1$ и $\angle B \neq \angle B_1$ (¬). Отложим от полупрямой *AB* в полуплоскость точки *C* угол, равный углу A_1 (акс. VIII), и отложим на его стороне отрезок AC_2, равный A_1C_1 (акс. V). Тогда у треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC_2 $AB = A_1B_1$ по условию, $A_1C_1 = AC_2$ и $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC_2$ по построению, следовательно, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC_2$ (акс. IX). Из равенства треугольников следует, что $BC_2 = B_1C_1$ (опр. 20). По условию $BC = B_1C_1$, следовательно, $BC_2 = BC$, то есть треугольник BCC_2 равнобедренный с основанием C_2C (опр. 26).

По построению $AC_2 = A_1C_1$ и по условию $AC = A_1C_1$, следовательно, $AC_2 = AC$, то есть треугольник ACC_2 равнобедренный с основанием C_2C (опр. 26).

Пусть точка *D* – середина отрезка CC_2 (т. 6). Угол BAC_2 отложен в полуплоскость точки *C* ⇒ точки C_2 и *C* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AB* ⇒

отрезок C_2C не пересекается с прямой AB (т. 8) ⇒ точка D не лежит на прямой AB (опр. 7) ⇒ прямые AD и BD различны (акс. II).

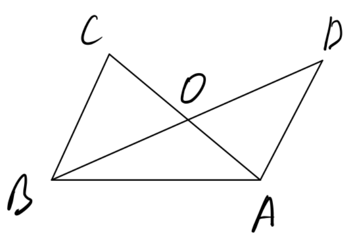
AD и BD медианы в равнобедренных треугольниках ACC_2 и BCC_2 (опр. 27), следовательно, по теореме 35 они являются и высотами, а, значит, и перпендикулярами (опр. 30), то есть прямая AD перпендикулярна прямой CC_2 и прямая BD перпендикулярна CC_2 (опр. 29). Но по теореме 31 через точку D может проходить только одна прямая, перпендикулярная прямой CC_2 ⊗. Значит, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

§5. Соотношения между углами и сторонами треугольника

1. Соотношения между углами треугольника

<u>Теорема 38</u>. Сумма любых двух углов треугольника меньше 180°.

<u>Доказательство</u>. Пусть ABC – данный треугольник. Докажем, что сумма углов при вершинах A и C меньше 180°. Обозначим через O середину стороны AC (т. 6). Заметим, что так как точка O по определению принадлежит отрезку AC, то есть разделяет точки A и C, полупрямые OA и OC дополнительные (т. 11 и опр. 9). Отложим на полупрямой, дополнительной полупрямой OB, отрезок OD, равный BO (т. 14 и акс. V). Тогда в треугольниках AOD и COB углы при вершине O вертикальные (опр. 23), и, следовательно, они равны (т. 30), $AO = OC$ так как точка O – середина (опр. 6), $OD = OB$ по построению, следовательно, $\Delta AOD = \Delta COB$ по аксиоме IX. Из равенства треугольников по определению следует, что $\angle OAD = \angle OCB$. Точки O и C лежат по одну сторону от A, значит, лучи AO и AC совпадают (следствие из т. 11). Аналогично лучи CO и CA совпадают. Значит, $\angle CAD = \angle ACB$ **(*)**.



Луч AO пересекает отрезок BD в точке O, следовательно, луч AO проходит между сторонами угла BAD (опр. 16). Тогда по аксиоме VII $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle BAC + \angle ACB$ **(**)** – во втором равенстве мы использовали (*). Таким образом, угол BAD равен сумме углов при вершинах A и C треугольника ABC.

По определению треугольника точки A, B и C не лежат на одной прямой ⇒ прямые AB и AC различны ⇒ точка O прямой AC не лежит на прямой AB (т. 2) ⇒ прямая BO не совпадает с прямой AB ⇒ точка D прямой BO не лежит на прямой AB (т. 2) ⇒ угол BAD не является развёрнутым (опр. 15 и 9) ⇒ $\angle BAD < 180°$ (след. 1 из т. 21) ⇒ $\angle BAC + \angle ACB < 180°$ (**). Теорема доказана.

Определение 32. Угол меньший 90° называется *острым*. Угол больший 90°, но меньшей 180°, называется *тупым*.

Из теоремы 38 следует, что *в каждом треугольнике два угла острые.* В противном случае, если бы только один угол был острым, сумма двух других углов была бы больше 180°.

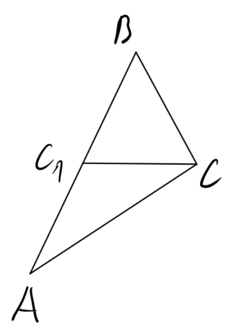
Определение 33. *Внешним углом* треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине.

Чтобы не путать угол треугольника при данной вершине с внешним углом при этой вершине, угол треугольника называют *внутренним углом*.

Теорема 39. Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.
Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Докажем, что внешний угол при вершине A больше внутреннего угла B. По теореме 38 сумма внутренних углов A и B меньше 180°: $\angle A + \angle B < 180° \Rightarrow \angle B < 180° - \angle A$. Но по следствию 1 из теоремы 27 $(180° - \angle A)$ есть градусная мера внешнего угла при вершине A, следовательно, угол B меньше внешнего угла при вершине A (опр. 17). Теорема доказана.

2. Соотношение между углами треугольника и противолежащими им сторонами

Теорема 40. Если $AB > BC$ в треугольнике ABC, то угол C больше угла A. Обратно, если угол C больше угла A, то $AB > BC$. Короче говоря, в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла лежит большая сторона.
Доказательство. Пусть $AB > BC$ в треугольнике ABC. Отложим на полупрямой BA отрезок BC_1, равный отрезку BC (акс. V). Точка C_1 лежит между точками A и B (т. 4) и, следовательно, C_1 принадлежит отрезку AB (опр. 3). Полупрямая CC_1 проходит между лучами CA и CB так как пересекает отрезок AB в точке C_1 (опр. 16), следовательно, по аксиоме VII $\angle BCA = \angle BCC_1 + \angle ACC_1 \Rightarrow$



$\angle BCC_1 < \angle BCA$ **(*)**.

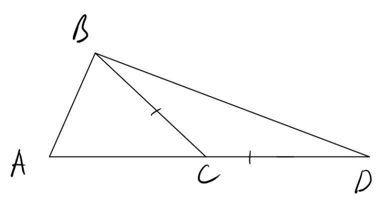
$BC_1 = BC$ по построению $\Rightarrow$ треугольник BCC_1 равнобедренный (опр. 26) $\Rightarrow \angle BC_1C = \angle BCC_1$ (т. 33) **(**)**.

Точка C_1 лежит между точками A и $B \Rightarrow C_1A$ и C_1B дополнительные полупрямые (т. 11 и опр. 9) $\Rightarrow$ угол BC_1C смежный с углом AC_1C (опр. 22) $\Rightarrow$ угол BC_1C является внешним углом треугольника AC_1C (опр. 32) $\Rightarrow \angle BC_1C > \angle CAC_1$ (т. 39) $\Rightarrow \angle BC_1C > \angle CAB$ (следствие из т. 11) $\Rightarrow \angle CAB < \angle BCA$ (*, **). Итак, угол C треугольника ABC больше угла A.

Докажем теперь, что если $\angle C > \angle A$, то AB > BC. Допустим, что утверждение неверно (¬). Тогда либо AB = BC, либо AB < BC. В первом случае треугольник ABC – равнобедренный (опр. 26) и, следовательно, $\angle A = \angle C$ (т. 33), но это противоречит условию $\angle C > \angle A$. Если же AB < BC, то по доказанному $\angle A > \angle C$, что также противоречит условию ⊗. Значит, если $\angle C > \angle A$, то AB > BC. Теорема доказана.

3. Неравенство треугольника

Теорема 41. У каждого треугольника сумма двух сторон больше третьей стороны.
Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Докажем, что $AB < AC + CB$.



Отложим на полупрямой AC отрезок AD, равный $AC + CB$ (акс. V). Так как $AC < AD$, точка C лежит между точками A и D (т. 4), то есть принадлежит отрезку AD (опр. 3). Тогда $AD = AC + CD$ (акс. IV) и, следовательно, $CD = CB$. Значит, треугольник BCD – равнобедренный (опр. 26) и $\angle CBD = \angle BDC$ (т. 33). Так как точки A и C лежат по одну сторону от D, лучи DC и DA совпадают (следствие из т. 11), значит, совпадают и углы BDC и BDA. Таким образом, $\angle CBD = \angle BDA$.

Луч BC пересекает отрезок AD в точке C и, следовательно, проходит между сторонами угла ABD (опр. 16) $\Rightarrow \angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = \angle ABC + \angle BDA$ (акс. VI) $\Rightarrow \angle ABD > \angle BDA \Rightarrow AD > AB$ (т. 40) $\Rightarrow AC + CB > AB \Rightarrow AB < AC + CB$. Теорема доказана.

Следствие. Если для трёх точек A, B, C выполняется условие $AC = AB + BC$, то точки A, B, C лежат на одной прямой, причём точка B лежит между точками A и C.
Доказательство. Допустим, что точки A, B, C не лежат на одной прямой. Тогда они являются вершинами треугольника (опр. 9) и по теореме 41 $AC < AB + BC$ ⊗. Предположим, что точка A лежит между точками B и C. Тогда $BC = AB + AC$ (акс. IV) и с учётом условия $AC = AB + BC$ получаем, что $AB = 0$. Аналогично проверяется, что точка C не лежит между A и B. Так как из трёх точек A, B и C одна лежит между двумя другими (акс. III), то точка B лежит между A и C. Следствие доказано.

Определение 34. Если точки A и B различны, то *расстоянием* между ними называется длина отрезка AB. Если точки A и B совпадают (не являются различными), то расстояние между ними принимается равным нулю.

Теорема 42 (неравенство треугольника). Если A, B, C – любые три точки, не обязательно различные, то расстояние AB не больше суммы расстояний $AC + CB$.
Доказательство. Будем различать четыре случай: 1) все три точки A, B, C различны и не лежат на одной прямой; 2) все точки различны, но лежат на одной прямой; 3) две точки совпадают; 4) все точки совпадают.

В первом случае утверждение теоремы следует из теоремы 41.

Рассмотрим второй случай. Точки A, B, C различные и лежат на одной прямой. Если точка C лежит между A и B, то $AB = AC + CB$ (акс. IV), следовательно, AB не больше суммы $AC + CB$. Если точка A лежит между B и C, то $BC = AB + AC \Rightarrow AB < BC \Rightarrow AB < AC + CB$. Если точка B лежит между A и C, то $AC = AB + BC \Rightarrow AB < AC \Rightarrow AB < AC + CB$. При любом расположении точек A, B, C на прямой расстояние AB не больше суммы расстояний $AC + CB$.

Рассмотрим третий случай, когда две точки совпадают. Если точка A совпадает с B, то $AB = 0$ (опр. 34) $\Rightarrow AB < AC + CB$. Если точка A совпадает с C, то $AC = 0$ и $AB = CB$. Если точка B совпадает с C, то $BC = 0$ и $AB = AC$. В любом варианте совпадения двух точек расстояние AB не больше суммы расстояний $AC + CB$.

В четвёртом случае, когда все три точки совпадают, все три расстояния равны нулю и, следовательно, AB не больше $AC + CB$. Итак, для любых трёх точек A, B, C расстояние AB не больше суммы расстояний $AC + CB$. Теорема доказана.

§6. Прямоугольные треугольники

1. Углы и стороны прямоугольного треугольника

Определение 35. Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол.

Так как в любом треугольнике два угла острые, то *в прямоугольном треугольнике только один угол прямой.* Два другие угла прямоугольного треугольника острые.

Определение 36. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*. Две другие стороны называются *катетами*.

Так как в любом треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то *в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.*

2. Равенство прямоугольных треугольников

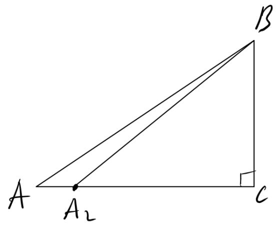
Для прямоугольных треугольников есть три признака равенства.

1) Если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого треугольника, то

такие треугольники равны. (Признак равенства по катету и противолежащему углу.)
2) Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны. (Признак равенства по гипотенузе и катету.)
3) Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны. (Признак равенства по гипотенузе и острому углу.)

Теорема 43. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами C и C_1 равны, если выполняется одно из следующих условий:
1) $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$;
2) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$;
3) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.

Доказательство. Заметим, что если $AC = A_1C_1$, то во всех трёх случаях треугольники равны по первому признаку равенства (акс. IX). Допустим, что $AC \neq A_1C_1$, например, $AC > A_1C_1$ (¬). Рассмотрим сначала случаи 1 и 2.

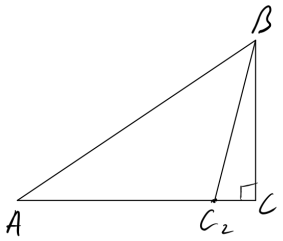


Отложим на полупрямой CA отрезок CA_2, равный C_1A_1 (акс. V). Точка A_2 будет лежать между точками A и C так как $CA_2 < CA$ (т. 4) ⇒ полупрямые A_2A и A_2C дополнительные (т. 11 и опр. 9) ⇒ углы BA_2C и BA_2A смежные (опр. 22).

Рассмотрим треугольники $A_1B_1C_1$ и A_2BC. У них $\angle C = \angle C_1$ и $BC = B_1C_1$ по условию, $CA_2 = CA_1$ по построению, следовательно, $\Delta A_2BC = \Delta A_1B_1C_1$ (акс. IX). Из равенства треугольников следует, что $\angle BA_2C = \angle B_1A_1C_1$ и $BA_2 = B_1A_1$ (опр. 20).

Пусть выполнены условия 1). Тогда $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = \angle BA_2C$. Но угол BA_2C является внешним углом треугольника BA_2A (опр. 33), а угол BAC совпадает с внутренним углом BAA_2 треугольника BA_2A (следствие из т. 11) ⇒ $\angle BA_2C > \angle BAC$ (т. 40) ⊗ ⇒ $AC = A_1C_1$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Пусть выполнены условия 2). Тогда $AB = A_1B_1 = BA_2$ ⇒ треугольник BAA_2 равнобедренный (опр. 26) ⇒ $\angle BAA_2 = \angle BA_2A$ (т. 33). Но угол BA_2A тупой так как он смежный с острым углом BA_2C в прямоугольном треугольнике BA_2C. Получаем, что в треугольнике BAA_2 два угла тупые, что противоречит теореме 38 ⊗ ⇒ $AC = A_1C_1$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

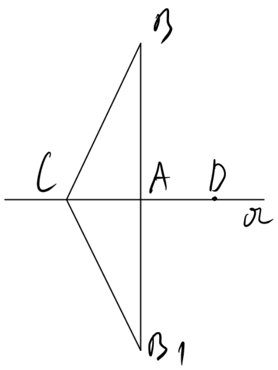


Пусть выполнены условия 3). Отложим на полупрямой AC отрезок AC_2, равный A_1C_1 (акс. V). Точка C_2 лежит между точками A и C так как $AC_2 < AC$ (т. 4) ⇒ полупрямые C_2A и C_2C дополнительные (т. 11 и опр. 9) ⇒ углы BC_2A и BC_2C смежные (опр. 22). Углы BCC_2 и BCA совпадают (следствие т. 11). Рассмотрим треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$. У них $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$ по условию, $AC_2 = A_1C_1$ по построению ⇒ $\Delta ABC_2 = \Delta A_1B_1C_1$ (акс. IX) ⇒ $\angle AC_2B = \angle A_1C_1B_1$ (опр. 20) ⇒ угол AC_2B прямой ⇒ смежный угол BC_2C тоже прямой (опр. 24 и след. 1 из т. 27) ⇒ в треугольнике BCC_2 два угла прямые, что противоречит теореме 38 ⊗ ⇒ $AC = A_1C_1$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

3. Перпендикуляр и наклонная

<u>Теорема 44</u>. Из точки вне данной прямой можно провести к этой прямой и притом только один перпендикуляр (или перпендикулярную прямую).

<u>Доказательство</u>. Пусть a – данная прямая и B – точка, не лежащая на этой прямой.



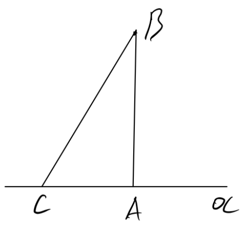
Отметим на прямой a какие-нибудь точки C и D. Если прямая BC перпендикулярна a, то отрезок BC и есть перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a (опр. 29).

Пусть отрезок BC не является перпендикуляром к прямой a. Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости, одной из которых принадлежит точка B. Отложим в другую полуплоскость от полупрямой CD угол, равный углу BCD (акс. VIII), и на стороне этого угла отложим отрезок CB_1, равный отрезку CB (акс. V).

Точки B и B_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a, следовательно, отрезок BB_1 пересекает эту прямую в некоторой точке A (т. 8). Рассмотрим треугольники CAB и CAB_1. В них сторона AC – общая, $CB = CB_1$ по построению, $\angle BCA = \angle B_1CA$ – либо по построению (если точки C и D разделяются точкой A), либо как смежные к углам равным по построению (если точки C и D не разделяются точкой A), следовательно, $\Delta CAB = \Delta CAB_1$ по аксиоме IX ⇒ $\angle CAB = \angle CAB_1$ (опр. 20). Точки B и B_1 разделяются точкой A, следовательно, полупрямые AB и AB_1 дополнительные (т. 11 и опр. 9), а, значит, углы CAB и CAB_1 смежные (опр. 22) и равные, следовательно, каждый из этих углов равен 90° (т. 27), то есть является прямым (опр. 24) ⇒ $BA \perp a$ (опр. 25) ⇒ BA есть перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a (опр. 29).

Допустим теперь, что из точки *B* можно провести ещё один перпендикуляр BA_1 к прямой *a* (¬). Тогда у треугольника BAA_1 будет два прямых угла, что противоречит теореме 38 ⊗. Следовательно, из точки *B* можно провести только один перпендикуляр (или перпендикулярную прямую) к прямой *a*. Теорема доказана.

Из теоремы 44 следует, что *у любого треугольника есть три высоты.* В прямоугольном треугольнике две высоты совпадают со сторонами треугольника. *В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.*



Определение 37. Пусть *BA* – перпендикуляр, опущенный из точки *B* на прямую *a*, и *C* – любая точка прямой *a*, отличная от *A*. Отрезок *BC* называется *наклонной*, проведённой из точки *B* к прямой *a*. Точка *C* называется *основанием* наклонной. Отрезок *AC* называется *проекцией* наклонной.

Любая наклонная больше перпендикуляра, проведённого из той же точки, потому что она является гипотенузой в треугольнике, образованном наклонной, перпендикуляром и проекцией наклонной.

Определение 38. *Расстоянием от точки B до прямой a*, не проходящей через точку *B*, называется длина перпендикуляра, опущенного из точки *B* на прямую *a*.

Так как перпендикуляр короче наклонной, проведённой из той же точки, то *расстояние от точки B до прямой a не больше расстояния от точки B до любой из точек прямой a.*

§7. Параллельные прямые

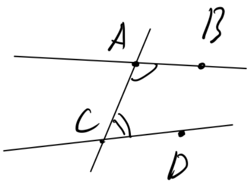
1. Признаки параллельности прямых

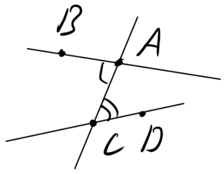
Весь предыдущий материал не опирался на аксиому X. Часть геометрии независящая от аксиомы о параллельных, называется *абсолютной геометрией*. Геометрия, в которой аксиома X истинна называется *евклидовой геометрией*, геометрия, в которой аксиома X ложна, называется *геометрией Лобачевского*. Все утверждения абсолютной геометрии истинны и в евклидовой геометрии, и в геометрии Лобачевского. Дальнейшее изложение относится только к евклидовой геометрии.

Теорема 45. Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу.
Доказательство. Пусть прямые *a* и *b* параллельны прямой *c*. Допустим, что прямые *a* и *b* не параллельны (¬). Тогда они пересекаются в некоторой точке *C*. Таким образом, через точку *C* проходит две прямые, параллельные прямой *c*. Но это противоречит аксиоме X ⊗. Следовательно $a \parallel b$. Теорема доказана.

Из теоремы 45 следует, что *если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.*

Определение 39. Пусть *AB* и *CD* – две прямые. Пусть *AC* – третья прямая, пересекающая *AB* и *CD*. Прямая *AC* по отношению к *AB* и *CD* называется *секущей*. Если точки *B* и *D* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AC*, то углы *BAC* и *DCA* называются *внутренними односторонними*. Если точки *B* и *D* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *AC*, то углы *BAC* и *DCA* называются *внутренними накрест лежащими*.

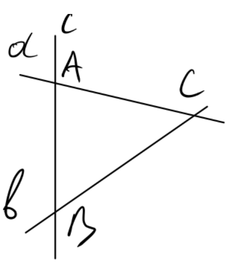




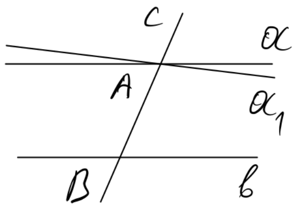
Секущая *AC* образует с прямыми *AB* и *CD* две пары внутренних односторонних и две пары внутренних накрест лежащих углов. Из свойства смежных углов следует, что если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны, а сумма внутренних односторонних углов каждой пары равна 180°. Обратно, если сумма внутренних односторонних углов одной пары равна 180°, то сумма внутренних односторонних углов другой пары тоже равна 180°, а внутренние накрест лежащие углы каждой пары равны.

Теорема 46. Пусть *a* и *b* – две прямые, а *c* – их секущая. Тогда если прямые *a* и *b* параллельны, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180°. Обратно, если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые *a* и *b* параллельны.

Доказательство. Начнём со второго утверждения теоремы. Допустим, что прямые *a*



и *b* не параллельны (¬), следовательно, они пересекаются в некоторой точке *C* (опр. 21). Углы *CAB* и *CBA* являются внутренними односторонними (опр. 39) и по условию их сумма равна 180°. Но сумма двух углов в треугольнике *ABC* не может быть равна 180° так как это противоречит теореме 38 ⊗. Следовательно, прямая *a* параллельна *b*.



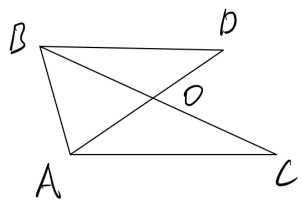
Докажем первое утверждение теоремы. Пусть *a* ∥ *b*, но сумма внутренних односторонних углов не равна 180° (¬). Проведём через точку *A* прямую a_1 так, чтобы сумма внутренних односторонних углов секущей *c* с прямыми a_1 и *b* была равна 180° (акс. VIII). Тогда по доказанному $a_1 \parallel b$. Но через точку A может проходить только одна прямая, параллельная b (акс. X) ⊗. Следовательно, сумма внутренних односторонних углов при прямых a и b и секущей с, равна 180°, а внутренние накрест лежащие углы равны. Теорема доказана.

Из теоремы 46 следует, что *две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.*

2. Сумма углов треугольника

Теорема 47. Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Отметим середину O стороны



BC треугольника (т. 6). Так как точка O принадлежит отрезку BC (опр. 6), она разделяет точки B и C (опр. 3), следовательно, полупрямые OB и OC – дополнительные (т. 11 и опр. 9). Отложим на полупрямой, дополнительной полупрямой OA, отрезок OD, равный отрезку OA (т. 14 и акс. V). Рассмотрим треугольники BOD и COA. В них углы при вершине O равны как вертикальные (опр. 23 и т. 30), $OB = OC$ так как точка O – середина (опр. 6), $OA = OD$ по построению, следовательно, $\Delta BOD = \Delta COA$ (акс. IX) ⇒ $\angle DBO = \angle ACO$ (опр. 20). Точки O и C лежат по одну сторону от точки B, следовательно, лучи BO и BC совпадают (следствие из т. 11). Аналогично лучи CO и CB совпадают. Значит, $\angle DBC = \angle ACB$ **(*)**.

Точки A и D принадлежат разным полупрямым с начальной точкой O, следовательно, они разделяются этой точкой (т. 11) ⇒ точка O принадлежит отрезку AD (опр. 3) ⇒ отрезок AD пересекает прямую BC в точке O (опр. 3 и 7) ⇒ точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC (т. 8) ⇒ углы DBC и ACB внутренние накрест лежащие при прямых AC и BD и секущей BC (опр. 39), из доказанного выше равенства этих углов (*) следует, что $AC \parallel BD$ (т. 46).

Отрезок AD лежит в полуплоскости точки D относительно прямой AB (т. 10) ⇒ точка O лежит в одной полуплоскости с точкой D. Отрезок BC лежит в полуплоскости точки C, относительно прямой AB (т. 10) ⇒ точка O лежит в одной полуплоскости с точкой C. Так как D лежит в одной полуплоскости с O, и C лежит в одной полуплоскости с O (следствие из т. 8.1), то точки D и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB ⇒ углы DBA и CAB являются внутренними односторонними при прямых BD и AC и секущей AB (опр. 39).

$AC \parallel BD \Rightarrow \angle DBA + \angle CAB = 180°$ (т. 46) **(**)**.

точка O принадлежит отрезку AD и лучу BC (т. 3) ⇒ луч BC пересекает отрезок AD в точке O ⇒ луч BC проходит между сторонами угла DBA (опр. 16) ⇒ $\angle DBA = \angle DBC + \angle ABC$ (акс. VII) – подставляем в (**):

$\angle DBC + \angle ABC + \angle CAB = 180°$, с учётом (*)

$\angle ACB + \angle ABC + \angle CAB = 180°$, то есть сумма углов треугольника ABC равна 180°.

Теорема доказана.

Из теоремы 47 следует, что *в прямоугольном треугольнике острые углы дополняют друг друга до 90°.* Из теорем 47 и 36 *следует, что в равностороннем треугольнике все углы равны 60°.*

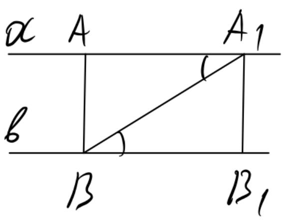
Теорема 48. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник, по теореме 47 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, следовательно, $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. В правой части равенства градусная мера внешнего угла при вершине C (опр. 33 и след. 1 т. 27), а в левой – сумма двух несмежных с ним углов треугольника. Теорема доказана.

3. Параллельные прямые как равноотстоящие прямые

Теорема 49. Параллельные прямые равноотстоящие, то есть все точки одной прямой находятся на одном и том же расстоянии от другой прямой.

Доказательство. Пусть a и b – две параллельные прямые. Отметим на прямой a две произвольные точки A и A_1, и опустим из них перпендикуляры AB и A_1B_1 на прямую b (т. 44). Прямые AB и A_1B_1 перпендикулярны прямой b (опр. 29), следовательно, они перпендикулярны и прямой a (следствие из т. 46). Значит, треугольники BAA_1 и A_1B_1B прямоугольные с прямыми углами A и B_1 (опр. 35). Все остальные углы этих треугольников – острые (следствие из т. 38).



Углы BA_1A и A_1BB_1 являются либо внутренними односторонними, либо внутренними накрест лежащими относительно секущей A_1B (опр. 39). Так как оба этих угла являются острыми углами в прямоугольных треугольниках BAA_1 и A_1B_1B (опр. 19), то их сумма не может быть равна 180° (опр. 32), поэтому эти углы не могут быть внутренними односторонними. Значит, углы BA_1A и A_1BB_1 внутренние накрест лежащие при параллельных прямых a и b, и поэтому эти углы равны (т. 46).

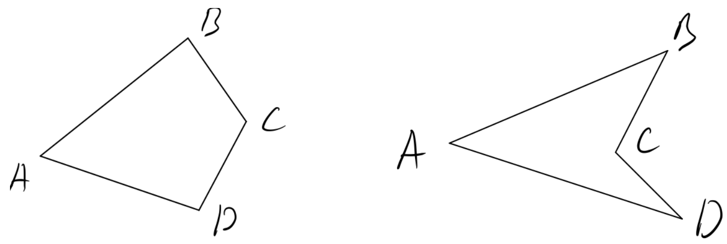
Прямоугольные треугольники BAA_1 и A_1B_1B равны по гипотенузе и острому углу (т. 43), следовательно, $AB = A_1B_1$ (опр. 20). Значит, расстояние от любой точки прямой a до прямой b одно и тоже (опр. 38), аналогично доказывается и обратное. Теорема доказана.

Определение 40. *Расстоянием между параллельными прямыми* называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

§8. Четырёхугольники

1. Выпуклые четырёхугольники

Определение 41. *Четырёхугольником* называется фигура, которая состоит из четырёх точек, каждые три из которых не лежат на одной прямой, и четырёх соединяющих эти точки отрезков. При этом каждая точка является концом ровно двух из отрезков, и отрезки не пересекаются друг с другом. Данные точки называются *вершинами* четырёхугольника, а соединяющие их отрезки – *сторонами* четырёхугольника.



Определение 42. Вершины четырёхугольника называются *соседними*, если они являются концами одной из его сторон. Вершины, не являющиеся соседними, называются *противолежащими*. Стороны четырёхугольника, исходящие из одной вершины, называются *соседними сторонами*. Стороны, не имеющие общего конца, называются *противолежащими сторонами*.

Определение 43. Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырёхугольника, называются *диагоналями*.

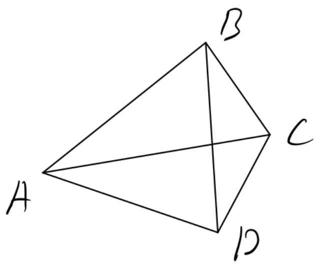
Определение 44. Четырёхугольник называются *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сторона, лежащая на данной прямой, и её концы не учитываются.

Четырёхугольник обозначается указанием его вершин. Например, четырёхугольник *ABCD*. В обозначении четырёхугольника стоящие рядом буквы должны обозначать соседние вершины.

Определение 45. *Углом выпуклого четырёхугольника ABCD при вершине A* называется угол, образованный полупрямыми *AB* и *AD*. Углы при других вершинах определяются аналогично.

Теорема 50. Диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются. Обратно, если диагонали четырёхугольника пересекаются, то он выпуклый.

Доказательство. Пусть *ABCD* – данный выпуклый четырёхугольник. Точки *B* и *C* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AD* (опр. 44). Значит, и полупрямые *AC* и *AB* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AD* (т. 9). По теореме 24 либо луч *AC* проходит между сторонами угла *BAD*, либо луч *AB* проходит между сторонами угла *CAD*. Но луч *AB* не может проходить между сторонами угла *CAD* (и разделять их по теореме 22) так как точки *C* и *D* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AB* (опр. 44). Следовательно, луч *AC* проходит между сторонами угла *BAD*, а, значит, отрезок *BD* пересекается с прямой *AC* (т. 23). Итак, диагональ BD (опр. 43) пересекается с прямой AC.



Таким же способом, рассматривая углы *ABC* и *ABD*, доказываем, что диагональ *AC* пересекает прямую *BD*. Так как диагональ *BD* пересекается с прямой *AC*, то прямые *BD* и *AC* пересекаются. Но эти прямые могут иметь только одну точку пересечения (т. 2). На прямой *AC* эта точка принадлежит отрезку *AC*, а на прямой *BD* – отрезку *BD*, следовательно, диагонали *AC* и *BD* пересекаются.

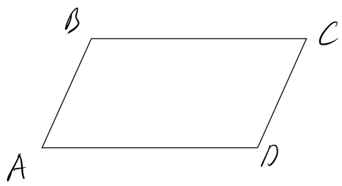
Докажем обратное утверждение. Пусть *ABCD* – четырёхугольник и диагональ *AC* пересекается с диагональю *BD* в точке *O*. Отрезок *AC* лежит в полуплоскости точки *C*, а отрезок *BD* лежит в полуплоскости точки *D* относительно прямой *AB* (т. 10). Так как точка *O* принадлежит обоим этим отрезкам, то *AC* и *BD* лежат в одной полуплоскости (полуплоскости точки *O*), а, значит, в ней лежат и их концы *C* и *D*. Тогда и отрезок *CD* лежит в одной полуплоскости относительно прямой *AB* (т. 16), и в ней же лежат отрезки *AD* и *BC* (т. 10). Таким образом, весь четырёхугольник *ABCD* лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей его сторону *AB*. Аналогично доказывается, что *ABCD* лежит в одной полуплоскости относительно прямых, содержащих три другие его стороны. Следовательно, *ABCD* – выпуклый четырёхугольник (опр. 44). Теорема доказана.

Теорема 51. Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.
Доказательство. Пусть *ABCD* – данный выпуклый четырёхугольник. Полупрямая *DB* проходит между сторонами угла *ADC*, так как пересекает отрезок *AC* (т. 50, т. 3, опр. 16). Поэтому $\angle ADC = \angle ADB + \angle CDB$ (акс. VII). Точно также доказывается, что $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$. Отсюда следует, что сумма углов четырёхугольника *ABCD* равна сумме углов треугольников *BAD* и *BCD* (опр. 19 и 45), то есть 360° (т. 47). Теорема доказана.

2. Параллелограмм

Два отрезка называются *параллельными*, если они лежат на параллельных прямых.

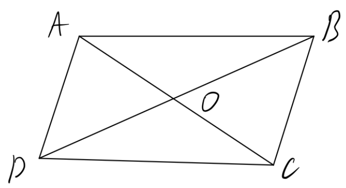
Пусть *a* и *b* – две параллельные прямые. Отметим на прямой *a* точку *A* и проведём через неё прямую, пересекающую прямую *b* в некоторой точке *B*. Отметим на прямой *a* точку *D* и проведём через неё прямую, параллельную прямой *AB*, она будет пересекать прямую *b* в некоторой точке *C*. Тогда *ABCD* – четырёхугольник у которого противолежащие стороны попарно параллельны, то есть лежат на параллельных прямых.



Определение 46. *Параллелограмм* – это четырёхугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Теорема 52. Параллелограмм есть выпуклый четырёхугольник.
Доказательство. Пусть *ABCD* – данный параллелограмм. Возьмём, например, его сторону *AD*. По определению *BC* || *AD*, следовательно, все точки прямой *BC*, включая отрезок *BC*, лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AD* (т. 29). В этой же полуплоскости лежат отрезки *AB* и *CD* (т. 10). Следовательно, весь параллелограмм, не считая стороны *AD* и её концов, лежит в одной полуплоскости относительно прямой *AD*. Аналогично можно проверить данное свойство для всех других сторон. Таким образом, параллелограмм есть выпуклый четырёхугольник (опр. 44). Теорема доказана.

Теорема 53. У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.
Доказательство. Пусть *ABCD* – данный параллелограмм. Его диагонали *AC* и *BD* (опр. 42 и 43) пересекаются в некоторой точке (т. 52 и 50), и, значит, отрезок *BD* пересекается с прямой *AC* (опр. 7) $\Rightarrow$ точки *B* и *D* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *AC* (т. 8) $\Rightarrow \angle BCA = \angle DAC$ как накрест лежащие при параллельных прямых *AD* и *BC* и секущей *AC* (опр. 39 и 46, т. 46). Аналогично доказывается, что $\angle BAC = \angle DCA$. Рассмотрим теперь треугольники *ACB* и *CAD*. У них сторона *AC* – общая, $\angle BCA = \angle DAC$, $\angle BAC = \angle DCA \Rightarrow \Delta ACB = \Delta CAD$ (т. 32) $\Rightarrow BC = AD$, $\angle ABC = \angle CDA$, $AB = DC$ (опр. 20).



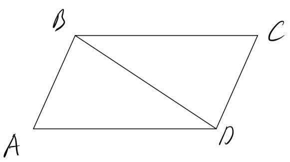
Теперь $\Delta ADB = \Delta BCD$ (т. 37) $\Rightarrow \angle DAB = \angle BCD$ (опр. 20). Теорема доказана.

Теорема 54. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
Доказательство. Пусть *ABCD* – данный параллелограмм и *O* – точка пересечения его диагоналей. Рассмотрим треугольники *AOD* и *COB*. В них $BC = AD$ по теореме 53, $\angle OBC = \angle ODA$ как накрест лежащие при параллельных прямых *AD* и *BC* и секущей *BD* (опр. 39 и 46, т. 46), $\angle OCB = \angle OAD$ как накрест лежащие при

параллельных прямых AD и BC и секущей AC. Следовательно, $\Delta AOD = \Delta COB$ (т. 32) $\Rightarrow OB = OD$ и $OA = OC$ (опр. 20). Теорема доказана.

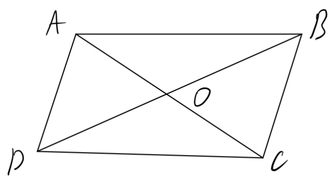
Теорема 55. 1) Если у выпуклого четырёхугольника две противолежащие стороны параллельны и равны, то четырёхугольник есть параллелограмм. 2) Если у выпуклого четырёхугольника противолежащие стороны равны, то этот четырёхугольник есть параллелограмм. 3) Если диагонали выпуклого четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам, то четырёхугольник есть параллелограмм.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный выпуклый четырёхугольник, тогда его диагонали AC и BD (опр. 42 и 43) пересекаются (т. 50), следовательно, точки A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BD (опр. 7 и т. 8). Значит, углы ABD и CDB являются внутренними накрест лежащими при прямых AB и CD и секущей BD, а углы CBD и ADB – внутренними накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей BD (опр. 39).



В случае первого утверждения теоремы $AD \parallel BC$ и $AD = BC$, тогда $\angle CBD = \angle ADB$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых и треугольники ABD и CDB равны по первому признаку равенства (акс. IX, т. 46) $\Rightarrow \angle ABD = \angle CDB$ (опр. 20) $\Rightarrow$ $CD \parallel AB$ (т. 46) $\Rightarrow ABCD$ – параллелограмм (опр. 46).

В случае второго утверждения теоремы $AB = CD$ и $AD = BC$, тогда $\Delta ABD = \Delta CDB$ по третьему признаку равенства (т. 37). Из равенства треугольников следует равенство накрест лежащих углов $\angle CBD = \angle ADB$ и $\angle ABD = \angle CDB$ (опр. 20), а, значит, $BC \parallel AD$ и $CD \parallel AB$ (т. 46) $\Rightarrow ABCD$ – параллелограмм (опр. 46).



В случае третьего утверждения теоремы $AO = OC$ и $BO = OD$. Точка O принадлежит отрезкам AC и BD, следовательно, полупрямые OA и OC, OB и OD являются дополнительными (следствие из т. 11). Значит, углы AOD и COB равны как вертикальные (опр. 23 и т. 30). Тогда $\Delta AOD = \Delta COB$ по первому признаку равенства $\Rightarrow AD = BC$ и $\angle ADO = \angle CBO$. Эти углы совпадают с внутренними накрест лежащими углами ADB и CBD, поэтому из их равенства следует, что $AD \parallel BC$. Тогда по доказанному первому утверждению теоремы четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм. Теорема доказана.

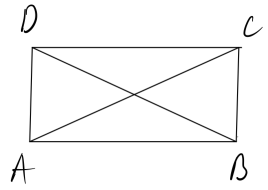
3. Прямоугольник. Ромб. Квадрат

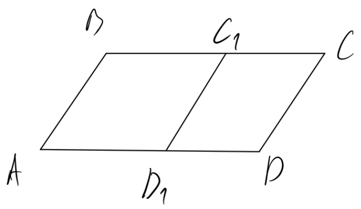
Пусть a и b – две параллельные прямые. Отметим на прямой a точки A и B и проведём через них прямые, перпендикулярные прямой a. Эти прямые также будут перпендикулярны и прямой b, которую пересекут в некоторых точках C и D. Тогда $ABCD$ это четырёхугольник у которого все углы прямые.

Определение 47. *Прямоугольник* – это четырёхугольник у которого все углы прямые.

Теорема 56. Прямоугольник есть параллелограмм. Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный прямоугольник. Так как все его углы прямые (опр. 47), то $AD \perp AB$ и $BC \perp AB$ (опр. 25) $\Rightarrow AD \parallel BC$ (следствие из т. 46); $AD \perp AB$ и $AD \perp CD \Rightarrow AB \parallel CD$. Получаем, что $ABCD$ – параллелограмм (опр. 46). По свойству параллелограмма $AB = DC$ (т. 53) $\Rightarrow$ треугольники BAD и CDA равны по первому признаку (акс. IX) $\Rightarrow BD = AC$. Теорема доказана.



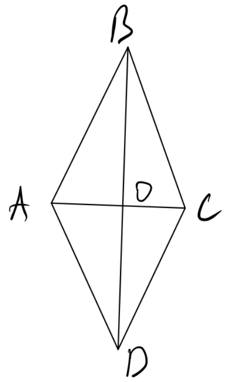


Пусть $ABCD$ – параллелограмм, у которого сторона BC больше стороны AB. Отложим на полупрямых BC и AD отрезки BC_1 и AD_1, равные стороне AB. Тогда четырёхугольник ABC_1D_1 это параллелограмм у которого все стороны равны.

Определение 48. *Ромб* – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Теорема 57. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Полупрямые, исходящие из вершин ромба и содержащие его диагонали, являются биссектрисами его углов.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный ромб, O – точка пересечения диагоналей ромба. Рассмотрим треугольники AOB и COB. У них сторона OB – общая, $AO = OC$ (т. 54 и опр. 48), $AB = BC$ (опр. 48) $\Rightarrow \Delta AOB = \Delta COB$ (т. 37) $\Rightarrow \angle ABO = \angle CBO$ и $\angle AOB = \angle COB$ (опр. 20). Углы AOB и COB смежные (опр. 22) и равные, следовательно, каждый из них равен 90° (т. 27), то есть является прямым (опр. 24). Луч BD пересекает отрезок AC в точке O (т. 3) и, следовательно, проходит между сторонами угла ABC (опр. 16). Тогда из равенства углов ABO и CBO следует, что BD – биссектриса угла ABC (опр. 18). Теорема доказана.



Определение 49. *Квадрат* – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат является ромбом, поэтому обладает свойствами прямоугольника и ромба.

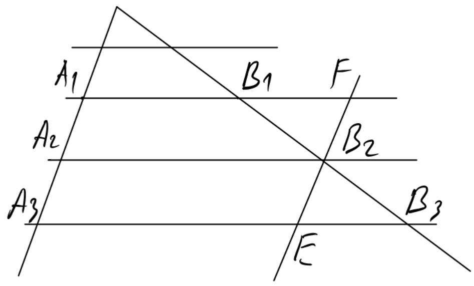
4. Теорема Фалеса

Лемма 6. Пусть три параллельные прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 пересекают прямую a в точках A_1, A_2, A_3, а прямую b в точках B_1, B_2, B_3. Тогда если точка A_2 лежит между точками A_1 и A_3, то точка B_2 лежит между точками B_1 и B_3.

Доказательство. Отрезок A_1A_3 пересекается с прямой A_2B_2 в точке A_2 (опр. 3 и 7), следовательно, точки A_1 и A_3 лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой (т. 8). Точки A_1 и B_1 лежат по одну сторону от прямой A_2B_2 так как прямая A_1B_1 параллельна прямой A_2B_2 (т. 29). Точно также точки A_3 и B_3 лежат по одну сторону от прямой A_2B_2. Значит, точки B_1 и B_3 лежат по разные стороны от этой прямой, и поэтому отрезок B_1B_3 пересекает прямую A_2B_2. Единственная общая точка прямых B_1B_3 и A_2B_2 это в точка B_2 (т. 2), следовательно, она принадлежит отрезку B_1B_3 (лемма 1). Следовательно, точка B_2 лежит между точками B_1 и B_3 (опр. 3). Лемма доказана.

Теорема 58 (Фалес). Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне.

Доказательство. Пусть A_1, A_2, A_3 – точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла и A_2 лежит между A_1 и A_3. Пусть B_1, B_2, B_3 – соответствующие точки пересечения этих прямых с другой стороной угла. Докажем, что если $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.



Точка B_2 лежит между B_1 и B_3 (лемма 6). Проведём через точку B_2 прямую EF, параллельную прямой A_1A_3 (т. 28). Тогда $A_1A_2B_2F$ и $A_2A_3EB_2$ – параллелограммы (опр. 46) и по свойству параллелограмма $A_1A_2 = FB_2$, $A_2A_3 = B_2E$ (т. 53). И так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то $FB_2 = B_2E$.

Точки F и E лежат в разных полуплоскостях относительно прямой A_2B_2 так как они лежат на прямых A_1B_1 и A_3B_3, лежащих в разных полуплоскостях (т. 29). Следовательно, полупрямые B_2F и B_2E различные (т. 9) и дополнительные (опр. 9). Аналогично полупрямые B_2B_1 и B_2B_3 тоже дополнительные. Следовательно, углы B_1B_2F и EB_2B_3 равны как вертикальные (опр. 23 и т. 30).

Отрезок B_1B_3 пересекает прямую EF в точке B_2, следовательно, точки B_1 и B_2 лежат в разных полуплоскоскостях относительно прямой EF (т. 8). Тогда углы B_2FB_1 и B_2EB_3 равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых A_1B_1 и A_3B_3 и секущей EF (опр. 39 и т. 46).

Из установленных выше равенств следует, что треугольники B_2B_1F и B_2B_3E равны по второму признаку (т. 32). Из равенства этих треугольников следует равенство сторон $B_1B_2 = B_2B_3$ (опр. 20). Теорема доказана.

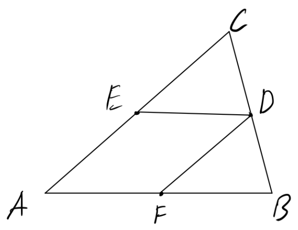
<u>Замечание</u>. Одним из концов отрезков в теореме Фалеса может быть вершина угла A. Тогда, если $AA_1 = A_1A_2$, то $AB_1 = B_1B_2$. Для доказательства достаточно провести через точку A прямую, параллельную A_1B_1.

5. Точка пересечения медиан треугольника

<u>Определение 50</u>. *Средней линией треугольника* называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

<u>Теорема 59</u>. Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

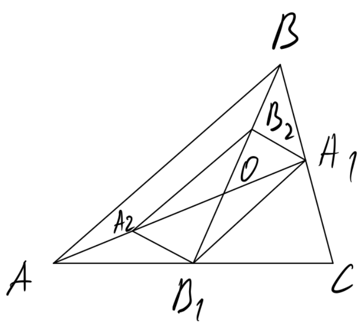
<u>Доказательство</u>. Пусть DE – средняя линия треугольника ABC. Проведём через точку D прямую, параллельную AB (т. 28). По теореме 58 она пересекает отрезок AC в его середине, то есть содержит среднюю линию DE. Первое утверждение доказано.



Проведём теперь среднюю линию DF. Она параллельна стороне AC. Четырёхугольник $AEDF$ – параллелограмм (опр. 46). По свойству параллелограмма $ED = AF$ (т. 53), а так как $AF = FB$ (опр. 6), то $ED = AB/2$. Теорема доказана.

<u>Теорема 60</u>. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

<u>Доказательство</u>. Пусть ABC – данный треугольник. Проведём медианы AA_1 и BB_1. Докажем сначала, что эти медианы пересекаются.



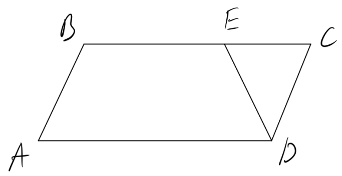
Отрезок AC лежит в полуплоскости точки C относительно прямой AA_1 (т. 10). Значит, точки C и B_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой AA_1. Отрезок BC пересекается с прямой AA_1 в точке A_1 (опр. 6 и 7), следовательно, точки C и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AA_1 (т. 8). Значит, точки B и B_1 лежат в разных полуплоскостях. Поэтому медиана BB_1 пересекается с прямой AA_1. Аналогично доказываем, что медиана AA_1 пересекается с прямой BB_1. Так как прямые AA_1 и BB_1 пересекаются только в одной точке (т. 2), то эта точка принадлежит и медиане AA_1, и медиане BB_1, то есть эти медианы пересекаются в некоторой точке O.

Проведём среднюю линию A_1B_1 треугольника ABC и среднюю линию A_2B_2 треугольника AOB. Обе они параллельны стороне AB, а, значит, и друг другу (т. 45), и равны половине этой стороны (т. 59).

Точка B_2 принадлежит отрезку OB так как является его серединой (опр. 50 и 6), следовательно, она принадлежит лучу OB (т. 3), дополнительному лучу OB_1. Тогда точка O разделяет точки B_2 и B_1 (т. 11). Аналогично доказывается, что точка O разделяет точки A_2 и A_1. Следовательно, диагонали A_1A_2 и B_1B_2 (опр. 43) четырёхугольника $A_1B_1A_2B_2$ пересекаются в точке O, и этот четырёхугольник выпуклый (т. 50). Тогда из того, что отрезки A_1B_1 и A_2B_2 параллельны и равны следует, что четырёхугольник $A_1B_1A_2B_2$ – параллелограмм (т. 55). По свойству параллелограмма $B_1O = OB_2$ (т. 54), по построению $OB_2 = B_2B$, таким образом, $BO = BB_2 + OB_2 = 2OB_2 = 2OB_1$, то есть медиана AA_1 делит медиану BB_1 в отношении 2:1, считая от вершины B. Медиана, проведённая из точки C, делит медиану BB_1 в том же отношении, поэтому и она проходит через точку O. Теорема доказана.

6. Трапеция

Пусть $ABCD$ – параллелограмм. Отметим на отрезке BC некоторую точку E. Тогда $ABED$ – это выпуклый четырёхугольник у которого только две противолежащие стороны параллельны.

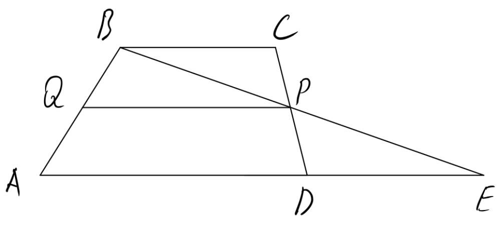


Определение 51. *Трапецией* называется выпуклый четырёхугольник, у которого только две противолежащий стороны параллельны. Эти параллельные стороны называются *основаниями* трапеции. Две другие стороны называются *боковыми сторонами* трапеции. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобокой*.

Определение 52. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией трапеции*.

Теорема 61. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данная трапеция с основаниями AD и BC; QP – средняя линия трапеции. Проведём через точку P прямую, параллельную основаниям трапеции (т. 28 и 45). Тогда по теореме 58 эта прямая пересечёт сторону AB в точке Q, то есть прямая, параллельная основаниям трапеции, содержит среднюю линию QP. Следовательно $QP \parallel BC \parallel AD$. Первое утверждение теоремы доказано.



Проведём через вершину B и середину P боковой стороны CD прямую. Она пересекает прямую AD в некоторой точке E (следствие из т. 45). Поскольку отрезок AB пересекается с прямой QP в точке Q, точки A и B лежат в разных полуплоскостях, относительно прямой QP (т. 8). Тогда и прямые BC и AD лежат в разных полуплоскостях относительно QP (т. 29). Значит, точки B и E лежат в разных полуплоскостях относительно QP, что возможно только если отрезок BE пересекает прямую QP (т. 8) в точке P (лемма 1). Тогда полупрямые PB и PE являются дополнительными (т. 11 и опр. 9). Так как середина P принадлежит отрезку CD (опр. 6), полупрямые PC и PD тоже дополнительные. Значит, углы BPC и EPD – вертикальные (опр. 23). Поскольку отрезок BE пересекает прямую CD в точке P, точки B и E лежат в разных полуплоскостях относительно CD и, следовательно, углы BCP и EDP внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей CD (опр. 39).

Так как четырёхугольник $ABCD$ – выпуклый, точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой CD (опр. 44), следовательно, точки A и E лежат в разных полуплоскостях. Значит, отрезок AE пересекается с прямой CD в точке D (лемма 1). То есть, точка D принадлежит отрезку AE, следовательно, $AE = AD + DE$ (акс. IV).

Рассмотрим треугольники PBC и PED. В них $CP = DP$ так как P – середина отрезка CD (опр. 6), $\angle BPC = \angle EPD$ как вертикальные (т. 30), $\angle BCP = \angle EDP$ как внутренние накрест лежащие (т. 46), следовательно, $\Delta PBC = \Delta PED$ по второму признаку (т. 32). Из равенства треугольников следует равенство сторон $PB = PE$, $BC = ED$ (опр. 20). Значит, точка P – середина отрезка BE и поэтому средняя линия трапеции QP является также средней линией треугольника ABE (опр. 50). По теореме 59 $PQ = \frac{AE}{2} = \frac{AD + DE}{2} = \frac{AD + BC}{2}$. Теорема доказана.

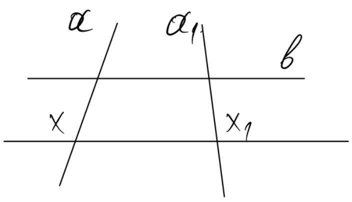
§9. Движение. Равенство фигур

1. Понятие движения

Определение 53. Пусть даны две фигуры F и F_1. Мы будем говорить, что между точками фигур установлено *взаимно однозначное соответствие*, если точки фигур объединены в пары (X, X_1) так, что каждая точка X фигуры F и каждая точка X_1 фигуры F_1 принадлежит одной и только одной паре. Точки X и X_1 фигур будем называть *соответствующими точками*.

Вместо взаимно однозначного соответствия между точками фигур F и F_1 можно говорить о *взаимно однозначном отображении* фигуры F на фигуру F_1.

Пример. Пусть фигура F есть прямая a, а фигура F_1 есть прямая a_1. Пусть, далее, b – прямая, пересекающая прямые a и a_1. Произвольная прямая, параллельная b, пересекает прямую a в некоторой точке X, а прямую a_1 в некоторой точке X_1.



Объединим каждые такие две точки в пару (X, X_1). Это объединение точек в пары есть взаимно однозначное соответствие между прямыми a и a_1.

Взаимно однозначное отображение фигуры F на себя (то есть когда точкам фигуры ставятся в соответствие точки этой же фигуры) называется *преобразованием* фигуры F.

Определение 54. Взаимно однозначное отображение (преобразование) плоскости на себя называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками, то есть переводит (ставит в соответствие) любые две точки X и Y плоскости в точки X_1 и Y_1 плоскости так, что $XY = X_1Y_1$.

2. Свойства движения

Теорема 62. При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.
Доказательство. Пусть точки $A, B, C,$ лежащие на прямой, переходят в точки A_1, B_1, C_1. Докажем, что тогда точки A_1, B_1, C_1 тоже лежат на одной прямой, и если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

Одна из трёх точек A, B, C лежит между двумя другими. Пусть, например, B лежит между точками A и C. Тогда по аксиоме IV $AC = AB + BC$ и поскольку при движении сохраняются расстояния между точками $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$ (опр. 54). Значит, точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой и если точка B лежит между A и C, то точка точка B_1 лежит между A_1 и C_1 (следствие из т. 41). Теорема доказана.

Пусть задано некоторое движение. Тогда, если F – произвольная фигура на плоскости, точки, соответствующие при движении точкам фигуры F, образуют некоторую фигуру F_1. Относительно фигуры F_1 мы будем говорить, что она *получена движением из фигуры* F. Мы будем говорить также, что при движении фигура F *переходит в фигуру* F_1.

Из теоремы 62 следует, что *при движении прямые переходят в прямые, полупрямые – в полупрямые, отрезки – в отрезки*.

Поясним это на примере отрезка. Пусть AB – данный отрезок. При движении точки A и B переходят в некоторые точки A_1 и B_1. Покажем, что отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1. Возьмём произвольную точку X на отрезке AB. Она переходит в некоторую точку X_1 прямой A_1B_1, лежащую между точками A_1 и B_1 (т. 62), то есть точка X отрезка AB переходит в точку X_1 отрезка A_1B_1. Для всякой ли точки X_1 отрезка A_1B_1 найдётся точка X отрезка AB? Да, если взять такую точку X отрезка AB, что $AX = A_1X_1$, то она как раз и переходит в точку X_1. Таким образом, между точками отрезка AB и точками отрезка A_1B_1 установлено взаимно однозначное соответствие.

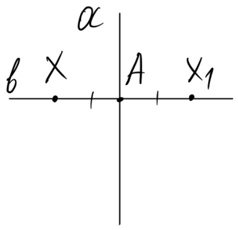
Пусть AB и AC – две полупрямые, исходящие из точки A и не лежащие на одной прямой. При движении эти полупрямые переходят в некоторые полупрямые A_1B_1 и A_1C_1. Так как движение сохраняет расстояния, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует равенство углов BAC и $B_1A_1C_1$. Следовательно, *при движении сохраняются градусные меры углов*.

Пусть последовательно выполнены два движения. При первом движении произвольная точка X переходит в некоторую точку X_1, а при втором точка X_1 переходит в точку X_2. Поскольку при каждом движении расстояние между точками сохраняется, то преобразование плоскости, при котором произвольная точка X переходит в точку X_2, тоже сохраняет расстояние между точками, а, значит, является движением. Таким образом, *два движения, выполненные последовательно, дают снова движение*.

Пусть при движении произвольная точка X переходит в точку X_1. Преобразование плоскости при котором произвольная точка X_1 переходит в точку X, очевидно, тоже является движением. Такое движение называется *обратным* данному.

3. Симметрия относительно прямой

Определение 55. Пусть a – некоторая прямая и X – произвольная точка плоскости. Проведём через точку X прямую b, перпендикулярную a. Она пересечёт прямую a в некоторой точке A. Построим теперь точку X_1 по следующему правилу. Если точка X лежит на прямой a, то X_1 совпадает с X. Если X не лежит на прямой a, то X_1 лежит в другой полуплоскости относительно прямой a на прямой b, причём расстояние AX_1 равно AX. Точка X_1 называется *симметричной* точке X относительно прямой a. Точка X является симметричной точке X_1 относительно прямой a.

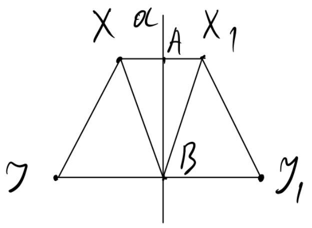


Поскольку для любой точки X симметричная ей точка определена однозначно, и наоборот, каждая точка X_1 симметрична только одной точке X, то сопоставив каждой точке плоскости точку симметричную ей относительно некоторой прямой a, мы получим взаимно однозначное отображение плоскости на себя.

Определение 56. Преобразование плоскости при котором точке X сопоставляется точка X_1, симметричная относительно прямой a, называется *преобразованием симметрии* или *зеркальным отражением* относительно прямой a.

Теорема 63. Преобразование симметрии относительно прямой является движением.
Доказательство. Пусть X и Y две произвольные точки и X_1, Y_1 – симметричные им точки относительно прямой a. Требуется доказать, что $XY = X_1Y_1$ (опр. 54).

1) Рассмотрим случай, когда точки X и Y лежат в одной полуплоскости относительно прямой a, и не лежат на прямой, перпендикулярной a.

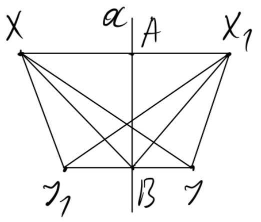


Прямая XX_1 пересекает прямую a в точке A, прямая YY_1 пересекает прямую a в точке B. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABX и ABX_1. У них катет AB общий, $XA = X_1A$ по определению симметрии, следовательно, $\Delta ABX = \Delta ABX_1 \Rightarrow XB = X_1B$; $\angle XBA = \angle X_1BA$.

Лучи BX и BY отложены в одну полуплоскость, причём в прямоугольном треугольнике XBA угол XBA – острый, а угол YBA – прямой, следовательно $\angle XBA < \angle YBA \Rightarrow$ луч BX проходит между сторонами угла YBA (т. 25). Значит, $\angle YBA = \angle YBX + \angle XBA$. Аналогично доказывается, что $\angle Y_1BA = \angle Y_1BX_1 + \angle X_1BA$. Так как $\angle YBA = \angle Y_1BA$ и по доказанному $\angle XBA = \angle X_1BA$, то $\angle YBX = \angle Y_1BX_1$. С учётом доказанного равенства $XB = X_1B$ и равенства $YB = Y_1B$ (по определению симметрии), получаем, что $\Delta YBX = \Delta Y_1BX_1 \Rightarrow XY = X_1Y_1$.

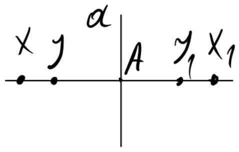
2) Рассмотрим случай, когда точки X и Y лежат в разных полуплоскоскостях относительно прямой a и не лежат на прямой, перпендикулярной a.

Аналогично первому случаю заключаем, что $\Delta ABX = \Delta ABX_1 \Rightarrow XB = X_1B$; $\angle XBA = \angle X_1BA$.



Лучи BX и BY_1 отложены в одну полуплоскость, причём угол Y_1BA – прямой, а угол XBA – острый, следовательно $\angle XBA < \angle Y_1BA \Rightarrow$ луч BX проходит между сторонами угла Y_1BA. Тогда $\angle Y_1BA = \angle Y_1BX + \angle XBA$. Аналогично $\angle YBA = \angle YBX_1 + \angle X_1BA$. С учётом равенства $\angle XBA = \angle X_1BA$ получаем, что $\angle Y_1BX = \angle YBX_1$. Добавим к этому, что по доказанному $XB = X_1B$ и $BY_1 = BY$ по определению симметрии, и получаем что $\Delta XBY_1 = \Delta X_1BY \Rightarrow XY_1 = X_1Y$ и $\angle XY_1B = \angle X_1YB$, поскольку $YY_1 = Y_1Y$, то $\Delta XYY_1 = \Delta X_1Y_1Y$ по первому признаку $\Rightarrow XY = X_1Y_1$.

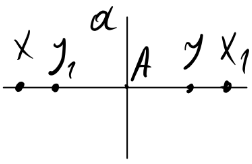
3) Рассмотрим случай, когда точки X и Y лежат в одной полуплоскости относительно прямой a на прямой, перпендикулярной a.



Пусть точка Y лежит между X и A. Тогда $XA = XY + YA$ **(*)** и $AY < AX$. По определению симметрии точки Y_1 и X_1 лежат на одной полупрямой с начальной точкой A и $AY_1 = AY$ и $AX_1 = AX \Rightarrow AY_1 < AX_1 \Rightarrow$ точка Y_1 лежит между A и X_1 (т. 13) $\Rightarrow X_1A = X_1Y_1 + Y_1A$.

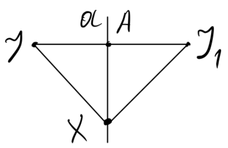
Сравнивая это выражение с (*) получаем, что $XY = X_1Y_1$.

4) Рассмотрим случай, когда точки X и Y лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a на прямой, перпендикулярной a.



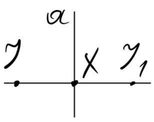
Точки X и Y лежат в разных полуплоскостях, следовательно, они лежат на разных полупрямых с начальной точкой A и точка A лежит между точками X и Y (т. 9 и 11), тогда $XY = XA + AY$. Аналогично, поскольку точки X_1 и Y_1 тоже лежат в разных полуплоскостях, получаем $X_1Y_1 = X_1A + AY_1$. Поскольку $AX = AX_1$ и $AY = AY_1$, то $XY = X_1Y_1$.

5) Рассмотрим случай, когда одна из точек лежит на прямой a, а другая не лежит на этой прямой, причём проходящая через них прямая не перпендикулярна a.



Пусть, например, точка X лежит на прямой a, а точка Y нет. Тогда точки X и X_1 совпадают, $\Delta XAY = \Delta XAY_1 \Rightarrow XY = XY_1 \Rightarrow XY = X_1Y_1$.

6) Рассмотрим случай, когда одна из точек лежит на прямой a, а другая не лежит на прямой a, причём проходящая через них прямая перпендикулярна a.



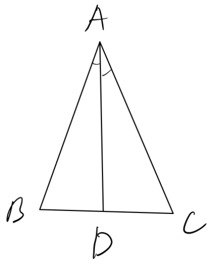
Пусть, например, точка X лежит на прямой a, а точка Y нет. По определению симметрии точка X_1 совпадает с X и $XY = XY_1 \Rightarrow XY = X_1Y_1$.

7) Рассмотрим случай, когда обе точки лежат на прямой a.

В этом случае точка X совпадает с X_1, и Y совпадает с Y_1, следовательно, $XY = X_1Y_1$. Теорема доказана.

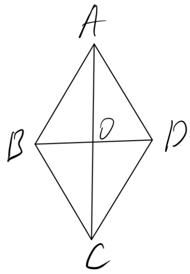
Определение 57. Если при преобразование симметрии относительно некоторой прямой a фигура F переходит в себя, то эта фигура называется *симметричной*, а прямая a называется *осью симметрии* фигуры F.

Пример. Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является его осью симметрии.



Пусть треугольник ABC равнобедренный с основанием BC. Биссектриса AD треугольника также является его высотой. Поэтому при симметрии относительно прямой AD точка A перейдёт с точку A, точка C перейдёт в точку B, а B в C. Таким образом, сторона AC перейдёт в AB, сторона AB в AC, BC в CB. То есть треугольник перейдёт в себя, следовательно, AD – его ось симметрии.

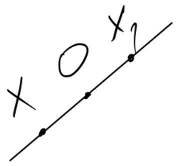
Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии.



Диагонали ромба пересекаются под прямым углов, поэтому при симметрии относительно прямой AC точка D перейдёт в точку B, точка B в точку D, таким образом, сторона ромба AD перейдёт в AB, AB в AD, стороны CB и CD также перейдут друг в друга. Значит, весь ромб переходит в себя и, следовательно, прямая AC является его осью симметрии.

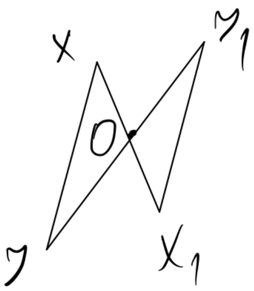
4. Симметрия относительно точки

Определение 58. Пусть O – некоторая точка плоскости и X – произвольная точка.



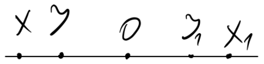
Построим точку X_1 по следующему правилу. Если точка X совпадает с O, то X_1 есть точка O. Если точка X не совпадает с O, то точка X_1 принадлежит полупрямой, дополнительной полупрямой OX, причём расстояние OX_1 равно OX. Построенная так точка X_1 называется *симметричной* X относительно точки O. Преобразование плоскости, при котором каждой точке X по указанному правилу сопоставляется точка X_1, называется *преобразованием симметрии* относительно точки O.

Теорема 64. Преобразование симметрии относительно точки есть движение.
Доказательство. Пусть X и Y – две произвольные точки и X_1, Y_1 – симметричные им точки относительно точки O. Требуется доказать, что $XY = X_1Y_1$ (опр. 54).



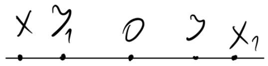
1) Рассмотрим случай, когда точки X и Y не совпадают с точкой O и не лежат с ней на одной прямой. Тогда существуют треугольники XOY и X_1OY_1 в которых углы при вершине O равны как вертикальные, стороны $X_1O = XO$ и $Y_1O = YO$ по определению симметрии. Значит, $\Delta XOY = \Delta X_1OY_1$ по первому признаку $\Rightarrow XY = X_1Y_1$.

2) Рассмотрим случай, когда точки X и Y не совпадают с точкой O и лежат с ней на одной прямой по одну сторону от O.



Пусть, например, точка Y лежит между X и O. Тогда $OY < OX$ и по определению $OY_1 = OY$, $OX_1 = OX \Rightarrow OY_1 < OX_1$. Значит, точка Y_1 лежит между O и X_1 на полупрямой дополнительной OX. Получаем, что $OX = XY + OY$ и $OX_1 = X_1Y_1 + OY_1 \Rightarrow XY = X_1Y_1$.

3) Рассмотрим случай, когда точки X и Y не совпадают с точкой O, лежат с ней на



одной прямой по разные стороны от O. Тогда точки X и Y_1 лежат на одной полупрямой, а точки X_1 и Y на другой полупрямой с начальной точкой O. Значит, $XY = OX + OY$ и $X_1Y_1 = OX_1 + OY_1$. Поскольку $OX = OX_1$ и $OY = OY_1$, то $XY = X_1Y_1$.

4) Рассмотрим случай, когда одна из точек совпадает с O. Пусть, например, точка X совпадает с O. Тогда X_1 совпадает с O и X. По определению симметрии $OY = OY_1$, следовательно, $XY = X_1Y_1$. Теорема доказана.

Определение 59. Если при симметрии относительно некоторой точки O фигура F переходит сама в себя, то она называется *центрально-симметричной*. Точка O называется *центром симметрии*.

Пример. Параллелограмм является центрально-симметричной фигурой. Его центром симметрии является точка пересечения диагоналей.

Пусть $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения его диагоналей. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Значит, при симметрии относительно точки O вершины переходят друг в друга следующий образом: $A \to C$, $B \to D$, $C \to A$, $D \to B$. Тогда сторона AB переходит в CD, сторона BC в DA, CD в AB, DA в BC. Таким образом, параллелограмм переходит в себя.

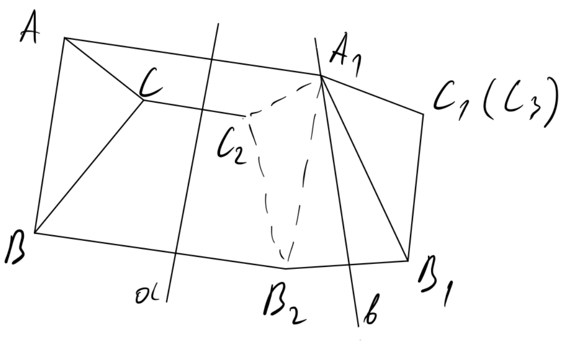
5. Равенство фигур

Определение 60. Фигуры F и F_1 называются *равными*, если они движением переводятся одна в другую.

Покажем, что равенство треугольников, определяемое через их совмещение движением, и равенство в смысле определения 20 выражают одно и то же.

Пусть треугольник ABC совмещается движением с треугольником $A_1B_1C_1$, например, так, что вершина A переходит в A_1, B – в B_1, C – в C_1. Так как при движении сохраняются расстояния и углы, то в наших треугольниках $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то есть треугольники равны в смысле определения 20.

Пусть теперь у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Докажем, что они совмещаются движением. Если точки A и A_1 не совпадают, выполним преобразование симметрии относительно прямой a, перпендикулярной отрезку AA_1 и проходящей через его середину. Получим треугольник $A_1B_2C_2$. Если точка B_2 не совпала с B_1, то выполним симметрию относительно прямой b, соединяющей точку A_1 с серединой отрезка B_1B_2.



Получим треугольник $A_1B_1C_3$.

Если точки C_1 и C_3 лежат по одну сторону от прямой A_1B_1, то они совпадают. Действительно, так как углы $B_1A_1C_1$ и $B_1A_1C_3$ равны, то лучи A_1C_1 и A_1C_3 совпадают, а так как отрезки A_1C_1 и A_1C_3 равны, то совпадают точки C_1 и C_3.

Если точки C_1 и C_3 лежат по разные стороны прямой A_1B_1, то надо ещё применить симметрию относительно прямой A_1B_1. В этом случае так как угол $A_1B_1C_3$ равен углу $A_1B_1C_1$, то луч A_1C_3 перейдёт в луч A_1C_1, а так как $A_1C_3 = A_1C_1$, то точка C_3 перейдёт в C_1. Таким образом, треугольник ABC движением переведён в треугольник $A_1B_1C_1$.

Аналогично доказывается и эквивалентность равенства для отрезков.

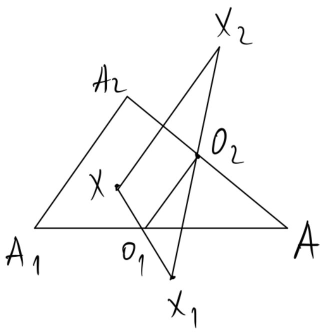
Покажем, что равенство углов по новому определению и по определению через градусную меру также эквивалентны. Выше уже доказывалось, что если один угол получен из другого движением, то эти два угла равны по определению 17. Теперь, пусть углы A и A_1 имеют равные градусные меры. Отложим на сторонах этих углов равные отрезки AB и A_1B_1, а на другой паре сторон равные отрезки AC и A_1C_1. Тогда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку и, как было только что доказано, совмещаются движением. Вместе с треугольниками совмещаются и углы A и A_1.

6. Параллельный перенос

Определение 61. *Параллельным переносом* называется такое движение, при котором точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние.

Теорема 65. Каковы бы ни были точки A_1 и A_2, существует и притом единственный параллельный перенос, при котором точка A_1 переходит в A_2.

Доказательство. Отметим точку A, не лежащую на прямой A_1A_2 и обозначим O_1 и O_2 середины отрезков A_1A и A_2A. Пусть X – произвольная точка плоскости. Построим симметричную относительно O_1 точку X_1 и затем построим точку X_2 симметричную



точке X_1 относительно точки O_2. Отображение плоскости на себя при котором точке X ставится в соответствие точка X_2 является движением, поскольку два движения, выполненные последовательно, снова дают движение. При этом движении точка A_1 переходит в A_2.

Если точка X не лежит на прямой O_1O_2, то O_1O_2 есть средняя линия треугольника X_1X_2X, поэтому прямые XX_2 и O_1O_2 параллельны, а отрезок XX_2 равен удвоенному отрезку O_1O_2 (т. 59).

Рассмотрим случай, когда точка X лежит на прямой O_1O_2. Введём на прямой O_1O_2 координаты, выбрав точку O_1 за начало координат, а луч O_1O_2 за положительную полупрямую. Тогда координата точки X_1, симметричной X относительно O_1, будет противоположна координате точки X, то есть $x_1 = -x$ (будем обозначать координаты точек прописными латинскими буквами). Координата точки O_2 равна длине отрезка O_1O_2 и поскольку точка O_2 является серединой отрезка X_1X_2, её координата равна $\dfrac{x_2 + x_1}{2}$ (т. 18). Получаем, что $\dfrac{x_2 + x_1}{2} = O_1O_2$. Значит,

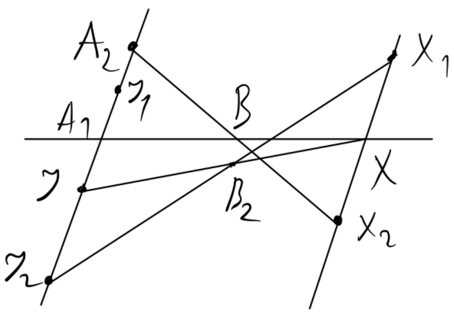
$$x_2 + x_1 = 2O_1O_2;$$

$$x_2 = 2O_1O_2 - x_1 = 2O_1O_2 + x.$$

Тогда для длины отрезка XX_2 по теореме 17 получаем:

$$XX_2 = |x_2 - x| = 2O_1O_2.$$

Таким образом, при построенном движении точки плоскости смещаются по прямым, параллельным прямой O_1O_2 (либо по самой этой прямой), на расстояние равное $2O_1O_2$. Значит, данное движение есть параллельный перенос (опр. 61).



Докажем единственность параллельного переноса, переводящего точку A_1 в точку A_2. Пусть X – произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой A_1A_2. Проведём через точку X прямую, параллельную A_1A_2 и отложим на ней отрезки XX_1 и XX_2, равные отрезку A_1A_2. Точки X_1 и X_2 различаются тем, что находятся по разные стороны от прямой A_1X. Пусть для определённости точка X_1 находится в одной полуплоскости с точкой A_2.

Точка X_2 не может соответствовать точке X при параллельном переносе, переводящем точку A_1 в A_2. Действительно, прямая A_1X при этом должна перейти в прямую A_2X_2. Точка B, в которой отрезок A_2X_2 пересекает прямую A_1X, должна перейти в точку B_1 также лежащую на прямой A_2X_2. В тоже время по свойству параллельного переноса прямая BB_1 параллельна прямой A_1A_2, но это невозможно так как прямая BB_1 совпадает с прямой A_2X_2, которая пересекается с A_1A_2 $\otimes$.

Пусть Y – произвольная точка на прямой A_1A_2. Отметим на прямой A_1A_2 точки Y_1 и Y_2, такие что $YY_1 = YY_2 = A_1A_2$. Эти точки отличаются тем, что лежат по разные стороны от прямой YX. Пусть для определённости точка Y_1 лежит в полуплоскости точки X_1.

Точка Y_2 не может соответствовать точке Y при рассматриваемом параллельном переносе. Действительно, прямая YX должна перейти в прямую Y_2X_1. Точка B_2, в которой отрезок Y_2X_1 пересекает прямую YX, должна перейти в точку B_3, также лежащую на прямой Y_2X_1. В тоже время по свойству параллельного переноса прямая B_2B_3 параллельна прямой XX_1, но это невозможно так как прямая B_2B_3 совпадает с прямой Y_2X_1, которая пересекает прямую XX_1 $\otimes$.

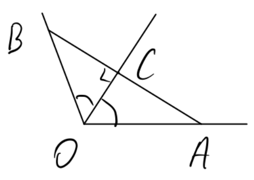
Таким образом, точке X (или Y) при рассматриваемом параллельном переносе может соответствовать только точка X_1 (Y_1). Однозначность в построении соответствующей точки и означает единственность данного параллельного переноса. Теорема доказана.

7. Поворот

Определение 62. *Поворотом* на угол φ относительно точки O называется такое движение, при котором точка O остаётся неподвижной, а каждый луч, исходящий из точки O, поворачивается на угол φ, то есть образует угол φ с соответствующим ему лучом.

Лемма 7. Прямая, содержащая биссектрису угла, является осью симметрии этого угла.

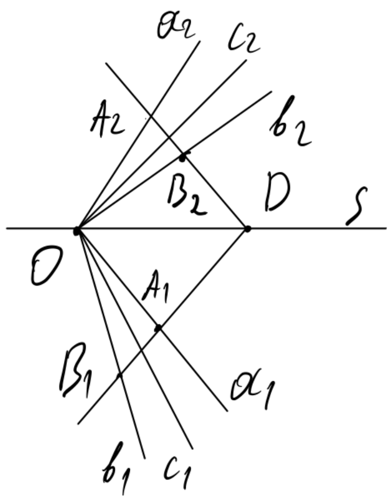
Доказательство. Если угол развёрнутый, то прямая, содержащая биссектрису угла, перпендикулярна прямой, которой принадлежат стороны угла. Поэтому при симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису развёрнутого угла, по определению симметрии любая точка на одной из сторон угла перейдёт в некоторую точку на другой стороне угла. Таким образом, развёрнутый угол перейдёт в себя.



Пусть A – произвольная точка на стороне данного неразвёрнутого угла O. Отложим на другой стороне угла отрезок $OB = OA$. Тогда треугольник AOB равнобедренный. Биссектриса угла пересекает сторону AB треугольника AOB в некоторой точке C (т. 23), причём отрезок OC является высотой и медианой этого треугольника. Следовательно, точка A при симметрии относительно прямой ОС переходит в точку B, лежащую на другой стороне угла (опр. 55). Значит, при симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису угла, угол переходит в себя и эта прямая является осью симметрии угла (опр. 57). Лемма доказана.

Теорема 66. Если при движении только одна точка остаётся неподвижной, то это движение есть поворот.

Доказательство. Пусть O – неподвижная точка. Проведём из неё лучи a_1 и b_1, не принадлежащие одной прямой. При движении они перейдут в лучи a_2 и b_2. Углы (a_1b_1) и (a_2b_2) равны как соответствующие при движении. Проведём биссектрису c_1 угла (a_1b_1), биссектрису c_2 угла (a_2b_2) и биссектрису угла (c_1c_2). Последнюю дополним до прямой и обозначим эту прямую s.



Так как биссектрисы c_1 и c_2 симметричны относительно прямой s (лемма 7), а углы (a_1b_1) и (a_2b_2) равны, то эти углы тоже симметричны относительно прямой s. При симметрии относительно прямой s могут быть два варианта: либо соответствующими являются лучи a_1 и a_2, b_1 и b_2; либо лучи a_1 и b_2, b_1 и a_2. Докажем, что первый вариант невозможен.

Пусть A_1 – точка на луче a_1, а B_1 – точка на луче b_1. Обозначим D – точку пересечения прямой A_1B_1 с прямой s (если $A_1B_1 \parallel s$ надо обозначить B_1 любую другую точку луча b_1). Симметричная A_1B_1 относительно s прямая пересечёт лучи a_2 и b_2 в точках A_2 и B_2. В случае первого варианта при симметрии относительно прямой s точка A_1 переходит в A_2, а точка B_1 в B_2. Так как точка O переходит при этом в себя, то $OA_1 = OA_2$, $OB_1 = OB_2$. Поэтому для первого варианта точки A_1 и A_2, B_1 и B_2 являются соответствующими при движении, о котором идёт речь в теореме.

Поскольку всякое движение сохраняет расстояния между точками и порядок расположения точек на прямой, в случае первого варианта любая точка X прямой A_1B_1 и при данном движении, и при симметрии относительно прямой s переходит в одну и ту же точку прямой A_2B_2. В частности точка D остаётся неподвижна. Но это невозможно, так как при данном движении неподвижна только точка O ⊗. Следовательно, первый вариант соответствия невозможен.

Остаётся второй вариант. В этом случае соответствующими при симметрии относительно прямой s являются лучи a_1 и b_2, b_1 и a_2. При этом углы (a_1a_2) и (b_1b_2) являются соответствующими по симметрии, а, следовательно, равными.

В случае, когда лучи a_1 и b_1 лежат на одной прямой, проведём из точки O ещё один луч e_1. По доказанному лучи a_1 и e_1 поворачиваются на один и тот же угол, и лучи b_1

и e_1 тоже поворачиваются на один и тот же угол, значит, и углы поворота лучей a_1 и b_1 равны. Теорема доказана.

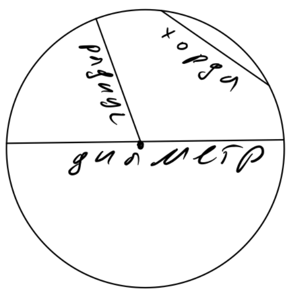
Из теоремы 66 следует, что *два зеркальных отражения, выполненные последовательно относительно двух пересекающихся прямых, дают поворот.*

Действительно, движение, которое получается в результате зеркальных отражений относительно двух пересекающихся прямых, оставляет неподвижной только одну точку – точку пересечения прямых. А по теореме 66 такое движение есть поворот.

§10. Окружность

1. Простейшие свойства окружности

Определение 63. *Окружностью* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки. Эта точка называется *центром окружности.*



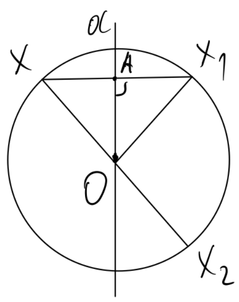
Определение 64. Расстояние от точек окружности до её центра называется *радиусом* окружности. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром.

Определение 65. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, содержащая центр окружности, называется *диаметром*.

Из определений 63-65 и аксиомы IV следует, что *диаметр равен двум радиусам*.

Теорема 67. Прямая, содержащая любой диаметр окружности, является осью симметрии окружности. Центр окружности является центром симметрии.

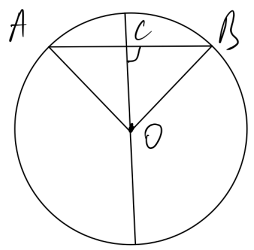
Доказательство. Пусть a – прямая, содержащая диаметр окружность и X – произвольная точка окружности. Построим точку X_1, симметричную точке X относительно прямой a. Если точка X принадлежит прямой a, то при симметрии она переходит в себя и, значит, остаётся на окружности. Если точка X не принадлежит прямой а, рассмотрим прямоугольные треугольники OAX и OAX_1. У них катет OA общий, а катеты AX и AX_1 равны по определению симметрии. Следовательно $\Delta OAX = \Delta OAX_1 \Rightarrow OX_1 = OX \Rightarrow$ точка X_1 лежит на окружности (опр. 63).



Значит, при симметрии относительно прямой, содержащей диаметр, окружность переходит в себя, то есть эта прямая является осью симметрии окружности.

Построим теперь точку X_2, симметричную точке X относительно центра окружности. По определению симметрии относительно точки $OX_2 = OX$, то есть точка X_2 лежит на окружности, следовательно, центр окружности является центром симметрии. Теорема доказана.

Теорема 68. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду пополам.
Доказательство. Пусть AB – данная хорда и C – её середина. Проведём диаметр через точку C. Треугольники OCA и OCB равны по третьему признаку равенства треугольников. У них стороны OA и OB равны как радиусы (опр. 63 и 64), сторона OC – общая, а $AC = CB$, потому что C – середина отрезка AB. Из равенства этих треугольников следует, что их углы при вершине C, будучи равными и смежными, прямые. Таким образом, диаметр, проходящий через точку C, перпендикулярен хорде AB и делит её пополам. Другого, перпендикулярного хорде AB, диаметра не существует, так как через точку O можно провести только одну прямую, перпендикулярную AB. Теорема доказана.

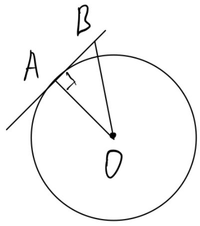


Теорема 69. Всякая хорда не больше диаметра. Она равна диаметру только тогда, когда сама является диаметром.
Доказательство. Если хорда AB не является диаметром, то в треугольнике AOB имеем $AB < AO + OB$ (т. 41). Так как AO и BO – радиусы, а диаметр равен двум радиусам, то AB меньше диаметра. Теорема доказана.

Определение 66. Прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярно к радиусу, проведённому в эту точку, называется *касательной*. При этом данная точка окружности называется *точкой касания*.

Из теоремы 31 следует, что *через любую точку окружности можно провести и притом только одну касательную.*

Говорят, что окружность *касается* отрезка AB, если точка касания окружности и прямой AB принадлежит отрезку AB.

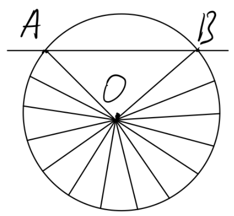


Теорема 70. Касательная имеет с окружностью только одну общую точку – точку касания.
Доказательство. Пусть B – любая точка касательной, отличная от точки касания A. По свойству перпендикуляра и наклонной $OB > OA$, то есть точка B отстоит от центра окружности на расстоянии, большем радиуса. Следовательно, точка B не принадлежит окружности. Теорема доказана.

2. Центральные углы

Определение 67. Пусть *A* и *B* – две точки окружности. Проведём через них прямую. Она разбивает плоскость на две полуплоскости. Части окружности, лежащие в этих полуплоскостях, мы будем называть *дугами окружности*. Если *AB* – диаметр, то дуги окружности называются *полуокружностями*.

Если хорда *AB* не является диаметром, то мы различаем дуги окружности следующим образом. Одна из полуплоскостей, на которые прямая *AB* разбивает плоскость, содержит центр окружности. Дугу, которая лежит в этой полуплоскости, будем называть дугой, *большей полуокружности*. Другую дугу будем называть дугой, *меньшей полуокружности*. Радиусы, проведённые в точки дуги, меньшей полуокружности, пересекают хорду *AB*, а радиусы, проведённые в точки дуги, большей полуокружности, не пересекают хорду *AB*.



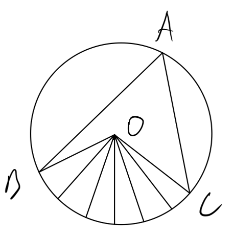
Определение 68. *Центральным углом*, отвечающим данной дуге окружности, мы будем называть фигуру, которая состоит из всех лучей, исходящих из центра окружности и пересекающих эту дугу.

На рисунке показаны лучи центрального угла большей полуокружности.

Для центральных углов определим *градусную меру* по следующему правилу. Если соответствующая дуга *AB* меньше полуокружности, то за меру центрального угла принимаем обычную меру угла, образованного полупрямыми *OA* и *OB*. Если дуга является полуокружностью, то есть *AB* диаметр, то угловую меру полагаем равной 180°. Наконец, если дуга больше полуокружности, то за угловую меру принимаем 360°– *α,* где *α* – градусная мера угла *AOB.*

3. Вписанные углы

Определение 69. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным* в окружность.

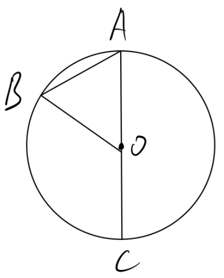


Определение 70. Пусть стороны вписанного угла с вершиной *A* пересекают окружность в точках *B* и *C*. Прямая *BC* разбивает окружность на две дуги. Центральный угол, соответствующей той из этих дуг, которая не содержит точку *A*, называется *центральным углом, соответствующим данному вписанному углу*.

На рисунке центральный угол, соответствующий вписанному углу, отмечен лучами, выходящими из точки *O*.

Теорема 71. Вписанный в окружность угол равен половине соответствующего центрального угла.

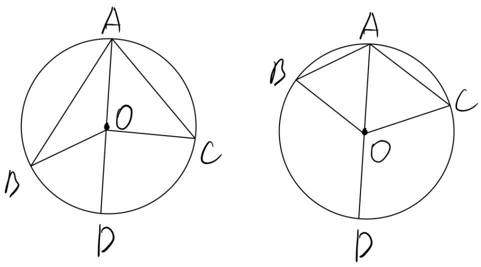
Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда одна из сторон вписанного угла *BAC* проходит через центр окружности. В этом случае луч *CA*, содержащий центр окружности, лежит в одной полуплоскости относительно прямой *BC* и поэтому центр окружности *O* лежит в одной полуплоскости с точкой *A.* Следовательно, центральный угол, соответствующий вписанному углу ВАС, опирается на дугу ВС, меньшую полуокружности (опр. 68 и 70). Его градусная мера равна градусной мере угла *BOC*. Угол *BOC* является внешним углом треугольника *BAO*, следовательно, $\angle BOC = \angle A + \angle B$ (т. 48).



Но $\angle A = \angle B$ как углы при основании равнобедренного треугольника *AOB* $\Rightarrow \angle BOC = 2\angle A \Rightarrow \angle A = \dfrac{\angle BOC}{2}$, то есть угол *BAC* равен половине соответствующего центрального угла.

Пусть теперь ни одна из сторон вписанного угла *BAC* не проходит через центр окружности. Проведём диаметр *AD.* Для этого отложим на полупрямой дополнительной *OA* отрезок *OD* = *OA*. Будем различать два случая. 1) Стороны угла *A* разделяются лучом *AD*. 2) Стороны угла *A* не разделяются лучом *AD*.

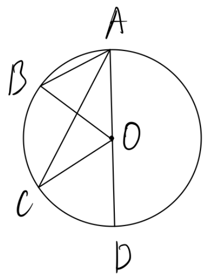
Рассмотрим первый случай. По доказанному $\angle BAD = \dfrac{\angle BOD}{2}$; $\angle CAD = \dfrac{\angle COD}{2}$. Если центральный угол, соответствующий углу *A*, меньше либо равен 180°, то точки *A* и *O* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *BC* (либо точка *O* лежит на прямой *BC*), значит, отрезок *BC* пересекает прямую *AD* в точке, лежащей на полупрямой *OD* или в самой точке *O*. То есть, луч *OD* проходит между сторонами угла *BOC*. Тогда получаем, что $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle COD) = \frac{1}{2}\angle BOC.$ Следовательно, угол *BAC* равен половине соответствующего центрального угла.



Если центральный угол, соответствующий вписанному углу *A*, больше 180°, то точки *A* и *O* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *BC*, следовательно, луч *OA* проходит между сторонами угла *BOC*. Тогда $\angle BOD = 180° - \angle AOB$; $\angle COD = 180° - \angle AOC \Rightarrow \angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle COD) = \frac{1}{2}(360° - (\angle AOB + \angle AOC)) = \frac{1}{2}(360° - \angle BOC)$, то есть угол *BAC* равен половине соответствующего центрального угла.

Рассмотрим случай, когда луч *AD* не разделяет стороны угла *A*. Прежде всего докажем, что в этом случае центральный угол, соответствующий углу *BAC*, отвечает дуге меньшей полуокружности. Для этого, в соответствии с определениями 68 и 70, требуется доказать, что точки *A* и *O* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *BC*. Допустим, что это не так (¬). Тогда отрезок *AO* пересекает прямую *BC* в некоторой точке *E*. Заметим, что точка *E* не может принадлежать отрезку *BC*, так как луч *AD* на разделяет стороны угла *BAC*. Пусть точка *B* лежит между точками *C* и *E*. Тогда полупрямые *BE* и *BC* дополнительные. Угол *OBC* является углом при основании равнобедренного треугольника *OBC*, следовательно, этот угол острый. Значит, смежный ему угол *OBE* – тупой. Поскольку точка *E* принадлежит отрезку *OA*, отрезок *OE* меньше *OA*, то есть *OE* меньше радиуса окружности. Тогда в треугольнике *OBE* угол *OEB* больше тупого угла *OBE*, что невозможно ⊗. Аналогично рассматривается случай, когда точка *C* лежит между точками *B* и *E*. Следовательно, точки *A* и *O* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *BC* и градусная мера центрального угла, соответствующего углу *BAC,* равна градусной мере угла *BOC*.

Если луч *AD* не разделяет стороны угла *BAC*, то лучи *AB* и *AC* отложены в одну полуплоскость относительно прямой *AD*. Значит, либо луч *AB* проходит между



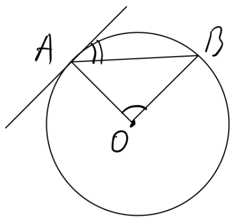
сторонами угла *CAD*, либо луч *AC* проходит между сторонами угла *BAD*. Пусть, например, луч *AC* проходит между лучами *AB* и *AD*. Тогда $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD \Rightarrow \angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$. По доказанному $\angle BAD = \dfrac{\angle BOD}{2}$; $\angle CAD = \dfrac{\angle COD}{2} \Rightarrow \angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle BOD - \dfrac{1}{2}\angle COD = \dfrac{1}{2}(\angle BOD - \angle COD)$. Так как $\angle BAC > 0$, то $\angle BOD > \angle COD \Rightarrow$ луч *OC* проходит между сторонами угла BOD $\Rightarrow \angle BOD = \angle BOC + \angle COD \Rightarrow \angle BOC = \angle BOD - \angle COD \Rightarrow \angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle BOC$, то есть угол *BAC* равен половине соответствующего центрального угла. Теорема доказана.

Из теоремы 71 следует, что *вписанные углы, стороны которых проходят через точки A и B окружности, а вершины лежат на одной из дуг, определяемых прямой AB, равны. В частности, углы, опирающиеся на полуокружность, прямые.*

Определение 71. Пусть *AB* – хорда окружности. Проведём касательную к окружности в точке *A*. Точка *A* разбивает касательную на две полупрямые – *полукасательные.* Угол между полукасательной и хордой *AB* (то есть лучом *AB*), и центральный угол, отвечающий той из дуг AB, которая лежит в одной полуплоскости с полукасательной относительно прямой *AB*, считаются соответствующими.

Лемма 8. Все точки окружности, кроме точки касания, лежат в полуплоскости центра окружности относительно касательной.
Доказательство. Допустим, что некоторая точка B окружности, отличная от точки касания A, и центр O лежат в разных полуплоскостях относительно касательной (¬). Тогда отрезок OB пересекает касательную в точке E и $OE < OB$, то есть OE меньше радиуса окружности. Но в тоже время $OE > OA$ по свойству перпендикуляра и наклонной ⊗. Значит, точки B и O лежат в одной полуплоскости относительно касательной. Лемма доказана.

Теорема 72. Угол между хордой и полукасательной в её концевой точке измеряется половиной соответствующего центрального угла.
Доказательство. Если хорда AB является диаметром, то углы между лучом AB и полукасательными равны 90°, а соответствующий центральный угол равен 180°.

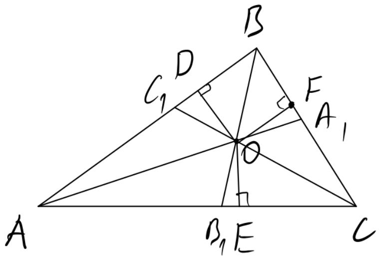


Пусть хорда AB не является диаметром. Тогда один из углов между полукасательной и хордой больше 90°, а другой меньше. Сначала рассмотрим случай, когда угол между полукасательной и хордой AB меньше 90°. Лучи AB и AO отложены в одну полуплоскость относительно касательной (лемма 8), поэтому луч AB проходит между полукасательной и лучом AO (т. 25) и, таким образом, разделяет точки полукасательной и центр окружности. Значит, соответствующий центральный угол опирается на дугу меньшую полуокружности. Угол между полукасательной и хордой равен $90° - \angle OAB = 90° - \frac{1}{2}(180° - \angle AOB) = 90° - 90° + \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\angle AOB$ – то есть этот угол равен половине соответствующего центрального угла.

Другой угол между полукасательной и хордой является смежным с рассмотренным и поэтому равен $180° - \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}(360° - \angle AOB)$ – то есть тоже равен половине соответствующего центрального угла. Теорема доказана.

4. Вписанная окружность

Лемма 9. Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, равноудалённой от сторон треугольника.
Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Проведём биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажем сначала, что эти биссектрисы пересекаются. Отрезок AC лежит в полуплоскости точки C относительно прямой AA_1 (т. 10). Значит, точки C и B_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой AA_1. Отрезок BC пересекается с прямой AA_1 в точке A_1 (опр. 6 и 7), следовательно, точки C и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AA_1 (т. 8). Значит, точки B и B_1 лежат в разных



полуплоскостях. Поэтому биссектриса BB_1 пересекается с прямой AA_1. Аналогично доказываем, что биссектриса AA_1 пересекается с прямой BB_1. Так как прямые AA_1 и BB_1 пересекаются только в одной точке (т. 2), то эта точка принадлежит и биссектрисе AA_1, и биссектрисе BB_1, то есть эти биссектрисы пересекаются в некоторой точке O. Аналогично доказывается, что биссектриса CC_1 пересекается с биссектрисой BB_1. Следовательно, точка пересечения любых двух биссектрис углов треугольника, принадлежит биссектрисам треугольника.

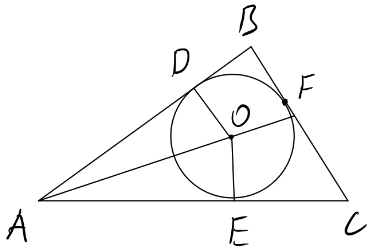
Опустим из точки O перпендикуляры OD, OE и OF на прямые AB, AC и BC. Докажем, что точки D, E и F лежат на сторонах треугольника ABC. Заметим, что точка D не может совпадать с точкой A (или B), поскольку в этом случае $OA \perp AB$ и, следовательно, угол BAC – развёрнутый. Но это невозможно так как точки B, A и C не лежат на одной прямой по определению треугольника. Допустим, что точка B лежит между точками D и A (¬). Тогда угол DBO является смежным с углом ABO. Угол ABO острый, как половина неразвёрнутого угла ABC. Значит, угол DBO тупой, что невозможно так как в прямоугольном треугольнике DBO не может быть тупого угла ⊗. Допустим, что точка A лежит между точками D и B (¬). Тогда угол DAO является смежным с углом BAO. Угол BAO острый, как половина неразвёрнутого угла BAC. Значит, угол DAO тупой, что невозможно так как в прямоугольном треугольнике DAO не может быть тупого угла ⊗. Поскольку одна из трёх точек A, D, B должна лежать между двумя другими, получаем, что точка D лежит между точками A и B. Аналогично доказывается, что точка E лежит между A и C, и точка F лежит между B и C.

Прямоугольные треугольники AOD и AOE равны. У них гипотенуза AO общая, а углы OAD и OAE равны потому что AO – биссектриса. Следовательно, $OD = OE$. Аналогично доказывается, что $OD = OF$. Следовательно, точка O – равноудалена от сторон треугольника ABC.

Проведём луч CO. Из равенства прямоугольных треугольников COE и COF следует, что $\angle ECO = \angle FCO$. Так как луч CO пересекает отрезок BB_1, он проходит между сторонами угла ACB. Значит, CO – биссектриса угла ACB треугольника ABC. Поскольку у угла ACB не может быть другой биссектрисы, получаем, что все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке O. Лемма доказана.

Определение 72. Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Теорема 73. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.
Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник, O – центр вписанной в него окружности, D, E и F – точки касания окружности со сторонами треугольника. Прямоугольные треугольники AOD и AOE равны по гипотенузе и катету. У них



гипотенуза AO общая, а катеты OD и OE равны как радиусы окружности. Из равенства треугольников следует равенство углов OAD и OAE.

Докажем теперь, что луч AO проходит между сторонами угла BAC. Обозначим AO_1 полупрямую дополнительную AO. OAD и OAE – равные острые углы в прямоугольных треугольниках AOD и AOE, значит, смежные им тупые углы O_1AB и O_1AC тоже равны.

По аксиоме VIII в полуплоскость точки B от полупрямой AO можно отложить только один угол, равный углу OAB, следовательно, угол OAC (совпадающий с углом OAE) отложен в другую полуплоскость. Значит, точки B и C лежат по разные стороны от прямой AO, поэтому отрезок BC пересекает прямую AO. Допустим, что точка пересечения отрезка BC и прямой AO лежит на полупрямой AO_1 (¬). Тогда полупрямая AO_1 проходит между сторонами угла BAC и является биссектрисой этого угла. Следовательно, угол BAC равен сумме двух тупых углов O_1AB и O_1AC, что противоречит теореме 21 ⊗. Точка A не может быть точкой пересечения отрезка BC и прямой AO, так как точки B, A и C не лежат на одной прямой по определению треугольника. Значит, точка пересечения отрезка BC и прямой AO лежит на полупрямой AO, то есть полупрямая AO проходит между сторонами угла BAC и является его биссектрисой (опр. 18).

Точно также доказывается, что точка O лежит на двух других биссектрисах углов треугольника. Значит, O – точка пересечения биссектрис треугольника (лемма 9). Теорема доказана.

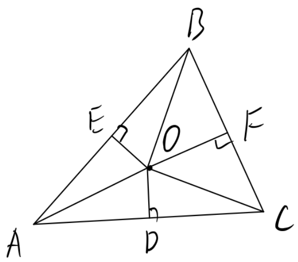
Теорема 74. В любой треугольник можно вписать и притом только одну окружность.
Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Его биссектрисы пересекаются в некоторой точке O, из которой можно опустить равные перпендикуляры OD, OE и OF к сторонами AB, AC и BC треугольника ABC (лемма 9). Следовательно, окружность, с центром O и радиусом OD касается сторон треугольника в точках D, E и F, то есть является вписанной (опр. 72).

Единственность вписанной окружности следует из леммы 9 и теорем 73 и 44, однозначно определяющих её центр и радиус. Теорема доказана.

5. Описанная окружность

Определение 73. Прямая, перпендикулярная прямой AB и проходящая через середину отрезка AB, называется *серединным перпендикуляром*.

Лемма 10. Серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке, равноудалённой от вершин треугольника.
Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Проведём через середины E и D сторон AB и AC треугольника прямые, перпендикулярные прямым AB и AC. Эти прямые пересекутся в некоторой точке O. Действительно, в противном случае они были бы параллельны. Но тогда прямые AB и AC, как перпендикулярные к параллельным, были бы тоже параллельными, а они пересекаются (в точке A).

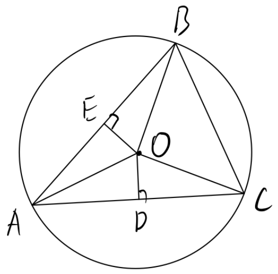


Из равенства прямоугольных треугольников AOD и COD следует, что $OA = OC$. Из равенства прямоугольных треугольников AOE и BOE следует, что $OA = OB$. Следовательно, точка O равноудалена от вершин треугольника ABC.

Опустим из точки O перпендикуляр OF на прямую BC. Из равенства прямоугольных треугольников BOF и COF следует, что $BF = CF$. Значит, F – середина отрезка BC (следствие из т. 6) и прямая OF является серединным перпендикуляром стороны BC (опр. 73). Так как через точку F нельзя провести другую прямую, перпендикулярную BC, получаем, что все три серединных перпендикуляра треугольника ABC пересекаются в точке O. Лемма доказана.

Определение 74. Окружность называется *описанной* около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Теорема 75. Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.
Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник и O – центр описанной около него окружности. Треугольник AOC равнобедренный; у него стороны OA и OC равны как радиусы. Медиана OD этого треугольника так же является его высотой. Поэтому центр окружности лежит на прямой, перпендикулярной стороне AC и проходящей через её середину. Точно так же доказывается, что центр окружности лежит на серединных перпендикулярах двух других сторон треугольника. Теорема доказана.



Теорема 76. Около любого треугольника можно описать и притом только одну окружность.
Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Серединные перпендикуляры его сторон пересекаются в некоторой точке O, равноудалённой от вершин треугольника ABC (лемма 10). Значит, окружность с центром в точке O и радиусом OA является описанной около треугольника ABC (опр. 74).

Единственность описанной окружности следует из леммы 10, теоремы 75 и определения 74, однозначно определяющих центр и радиус описанной окружности. Теорема доказана.

§11. Подобие треугольников

1. Основной признак подобия треугольников

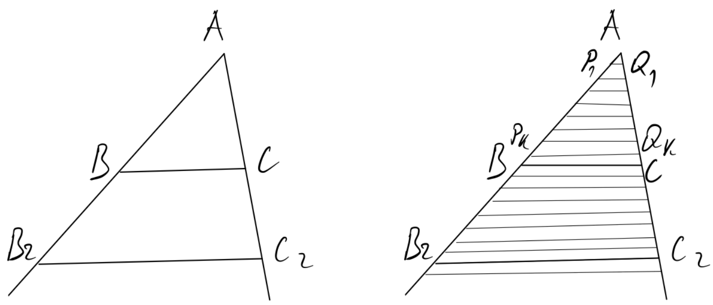
Определение 75. Треугольники ABC и DEF, не обязательно различные, называются *подобными,* если углы одного треугольника можно приравнять к углам другого так, что каждый угол участвует в одном и только одном верном равенстве, например, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, и при этом отношения сторон, лежащих против приравненных углов, равны, то есть $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$.

Обозначение $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Теорема 77. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то из равенства углов $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, следует равенство $\angle C = \angle C_1$. Докажем пропорциональность сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Если $AB = A_1B_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку и отношения их соответствующих сторон равны 1. Следовательно $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



Пусть $AB \neq A_1B_1$. Отложим на полупрямой AB отрезок AB_2, равный A_1B_1. Для определённости будем считать, что $AB < A_1B_1$, тогда точка B лежит между точками A и B_2. Проведём через точку B_2 прямую, параллельную BC. Она пересечёт прямую AC в некоторой точке C_2, причём C_2 будет лежать на полупрямой AC. Действительно, так как $B_2C_2 \parallel BC$ точки B_2 и C_2 лежат в одной полуплоскости относительно BC (т. 29). Точки B_2 и A лежат в разных полуплоскостях относительно BC, значит, и точки C_2 и A лежат в разных полуплоскостях, так что отрезок AC_2 пересекается с прямой BC. Единственная точка в которой прямые AC_2 и BC пересекаются это точка C, значит, точка C лежит между точками A и C_2.

Следовательно, точки C и C_2 лежат по одну сторону от A, и C_2 принадлежит полупрямой AC.

По свойству углов при параллельных прямых BC и B_2C_2 и секущей BB_2 $\angle AB_2C_2 = \angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Рассмотрим треугольники AB_2C_2 и $A_1B_1C_1$. У них $\angle B_2AC_2 = \angle B_1A_1C_1$ по условию теоремы, $AB_2 = A_1B_1$ и $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$ по построению $\Rightarrow$ $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow AC_2 = A_1C_1$.

На полупрямой AB отложим малый отрезок AP_1 так, чтобы два отношения $\frac{AB}{AP_1}$ и $\frac{AB_2}{AP_1}$ не были целыми. Построим на AB точки P_2, P_3 … P_k … так, чтобы $AP_k = k \cdot AP_1$.
Пусть n – целое от деления AB на AP_1, m – целое от деления AB_2 на AP_1. Так как $AB < A_1B_1$, то $n \le m$. Тогда

$$n \cdot AP_1 < AB < (n+1) \cdot AP_1;$$
$$m \cdot AP_1 < AB_2 < (m+1) \cdot AP_1.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AB}{AB_2} < \frac{n+1}{m}. \qquad (1)$$

Проведём через точки P_1, P_2, P_3 … прямые, параллельные BC. По теореме 58 (см. замечание после этой теоремы) эти прямые пересекут полупрямую AC в точках Q_1, Q_2, Q_3 … , причём отрезки AQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, … равны.

Так как $n \cdot AP_1 < AB$, то точка P_n лежит между A и B; $(n+1) \cdot AP_1 > AB$, значит, точка B лежит между A и P_{n+1}. По лемме 6 порядок точек Q_n, C, Q_{n+1} будет аналогичным, то есть Q_n лежит между A и C, точка C лежит между A и Q_{n+1}, значит,

$$n \cdot AQ_1 < AC < (n+1) \cdot AQ_1.$$

Аналогично рассуждая приходим к

$$m \cdot AQ_1 < AC_2 < (n+1) \cdot AQ_1.$$

Тогда

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AC}{AC_2} < \frac{n+1}{m}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) видно, что отношения $\frac{AB}{AB_2}$ и $\frac{AC}{AC_2}$ различаются меньше чем на $\frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1} = \frac{n+m+1}{m(m+1)} < \frac{2m+2}{m(m+1)} = \frac{2}{m}$.

Итак, отношения $\frac{AB}{AB_2}$ и $\frac{AC}{AC_2}$ отличаются не более чем на $\frac{2}{m}$. Если взять отрезок AP_1 достаточно малым, то число m будет как угодно велико, а $\frac{2}{m}$ будет как угодно мало.

Поэтому отношения $\frac{AB}{AB_2}$ и $\frac{AC}{AC_2}$ отличаются как угодно мало. А это может быть только в том случае, если они равны. Значит, $\frac{AB}{AB_2}=\frac{AC}{AC_2}$, но $AB_2 = A_1B_1$, а $AC_2=A_1C_1$ $\Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$. Аналогично доказывается, что $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$. Теорема доказана.

2. Другие признаки подобия треугольников

Теорема 78. Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$

$$\angle A = \angle A_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1},$$

то треугольники подобны.

Доказательство. Отложим на полупрямой AB отрезок $AB_2 = A_1B_1$ и проведём через точку B_2 прямую, параллельную BC. Эта прямая пересечёт прямую AC в точке C_2, причём, если точка B лежит между A и B_2, то C лежит между A и C_2, а если B_2 лежит между A и B, то C_2 лежит между A и C. В любом случае точка C_2 лежит на полупрямой AC. Получаем, что в треугольнике AB_2C_2 $AB_2 = A_1B_1$, $\angle B_2AC_2 = \angle A$, $\angle B_2 = \angle B$.

По теореме 77 $\Delta ABC \backsim \Delta AB_2C_2 \Rightarrow \frac{AB}{AB_2}=\frac{AC}{AC_2}$ (опр. 75). Но $AB_2 = A_1B_1 \Rightarrow$ $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{AC_2}$ и, так как $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ (по условию), то $A_1C_1 = AC_2$. Тогда в треугольниках $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 $A_1B_1 = AB_2$ по построению, $A_1C_1 = AC_2$ по доказанному, $\angle A_1 = \angle A = \angle B_2AC_2 \Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_2C_2$ и так как $\Delta ABC \backsim \Delta AB_2C_2$, то

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Теорема 79. Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$

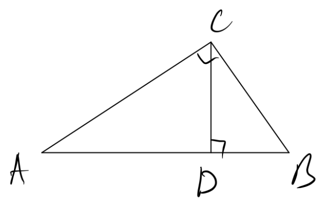
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1},$$

то треугольники подобны.

Доказательство. Построим треугольник $\Delta A_2B_2C_2$ у которого $A_2B_2 = A_1B_1$, $A_2C_2 = A_1C_1$, $\angle A_2 = \angle A$. По теореме 78 $\Delta ABC \backsim \Delta A_2B_2C_2 \Rightarrow \frac{AC}{A_2C_2}=\frac{BC}{B_2C_2}$, учитывая, что $A_2C_2 = A_1C_1$, получаем $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_2C_2}$ и так как по условию $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$, то $B_2C_2 = B_1C_1$. Тогда $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ по третьему признаку и так как $\Delta ABC \backsim \Delta A_2B_2C_2$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

3. Пропорциональные отрезки в треугольнике

Лемма 11. Основание высоты прямоугольного треугольника, проведённой из вершины прямого угла, лежит на гипотенузе.



Доказательство. Пусть *CD* – высота, проведённая из вершины прямого угла *C* прямоугольного треугольника *ABC*. Точка *D* не может совпадать с *A* или *B*, поскольку в этом случае в треугольнике *ABC* будет два прямых угла. Допустим, точка *B* лежит между *A* и *D*. Тогда углы *ABC* и *DBC* в прямоугольных треугольниках *ABC* и *DBC* смежные и оба острые, что невозможно. Таким же образом заключаем, что и точка *A* не может лежать между *B* и *D*. Следовательно, точка *D* лежит между *A* и *B*, то есть принадлежит гипотенузе *AB*. Лемма доказана.

Средним геометрическим чисел *a* и *b* называется число $\sqrt{ab}$.

Теорема 80. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое между проекциями катетов на гипотенузу. Каждый катет есть среднее геометрическое между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

Доказательство. 1) Пусть *ABC* – данный прямоугольный треугольник с прямым углом *C*. Основание *D* высоты *CD* лежит на гипотенузе *AB* (лемма 11). Так как каждый из углов *CAD* и *BCD* дополняет угол *ABC* до 90°, то $\angle CAD = \angle BCD \Rightarrow \Delta CAD$

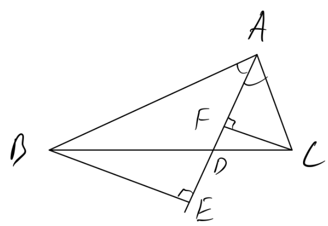
$\backsim \Delta BCD$ (т. 77) $\Rightarrow \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AD}{CD}$ (опр. 75) $\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD}$.

2) Аналогично получаем, что $\Delta BCD \backsim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{CB}{BD} \Rightarrow CB^2 = AB \cdot BD \Rightarrow$

$CB = \sqrt{AB \cdot BD}$. Теорема доказана.

Теорема 81. Биссектриса *AD* треугольника *ABC* делит сторону *BC* на отрезки, пропорциональные сторонам *AB* и *AC*, то есть $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD}$.

Доказательство. Если треугольник *ABC* равнобедренный с основанием *BC*, то биссектриса *AD* является медианой, следовательно, *BD* = *CD*. Так как *AB* = *AC*, то $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD}$.



Пусть AB ≠ AC. Опустим перпендикуляры *CF* и *BE* на полупрямую *AD* (точки *F* и *E* не могут попасть на полупрямую, дополнительную *AD,* так как в этом случае углы *BAE* и *CAF* в прямоугольных треугольниках окажутся тупыми) и докажем, что точки *E* и *F* разделяются точкой *D*. Допустим, что точки *E* и *F* лежат по одну сторону от *D* (¬).

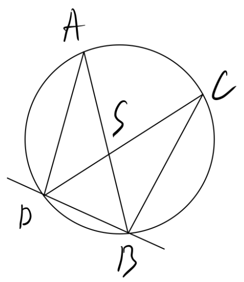
Тогда углы BDE и CDF в прямоугольных треугольниках BDE и CDF смежные и оба острые, что невозможно $\otimes$. Следовательно, точки F и E лежат по разные стороны от точки D. Тогда углы FDC и BDE равны как вертикальные. Значит, $\Delta BED \backsim \Delta CFD$ $\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD}$.

В треугольниках BAE и CAF углы E и F прямые, а углы при вершине A равны так как AD – биссектриса $\Rightarrow \Delta BAE \backsim \Delta CAF \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$. Теорема доказана.

4. Пропорциональность отрезков хорд и секущих

Теорема 82. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны. Именно, если хорды AB и CD пересекаются в точке S, то $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.

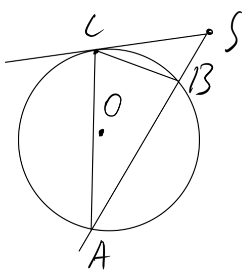
Доказательство. Проведём прямую BD. Точки A и C лежат в одной полуплоскости относительно BD, именно в полуплоскости точки S. Отсюда следует, что обе точки A и C принадлежат одной из дуг, на которые прямая BD делит окружность. А это значит, что вписанные углы DCB и DAB равны. Так как углы ASD и CSB равны как вертикальные, получаем, что $\Delta ASD \backsim \Delta CSB \Rightarrow$ $\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS} \Rightarrow AS \cdot BS = CS \cdot DS$. Теорема доказана.



Определение 76. Если прямая *a*, не являющаяся касательной окружности, имеет с окружностью общую точку A, то говорят, что прямая а *пересекает* окружность в точке A. Точка A называется *точкой пересечения* прямой *a* и окружности, а прямая *a* называется *секущей* окружности.

Теорема 83. Если через точку S проведена секущая окружности и касательная, причём A и B – точки пересечения окружности с секущей, а C – точка касания с касательной, то $AS \cdot BS = CS^2$. Короче говоря, произведение отрезков секущей равно квадрату касательной.

Доказательство. Докажем, что точки A и B не разделяются точкой S. Допустим, что точка S лежит между точками A и B ($\neg$). Проведём луч SO (O – центр окружности). Углы OSA и OSB смежные, значит, один из них не меньше 90°. Пусть, например, угол OSA не меньше 90°. Тогда в треугольнике OSA сторона OA – наибольшая и, значит, OS меньше радиуса окружности. Однако $OS > OC$ по свойству перпендикуляра и наклонной к прямой SC $\otimes$. Получаем, что точка S не может лежать между точками A и B. Пусть для определённости точка B лежит между точками A и S. Тогда



точки A и S лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC, следовательно, точка A не лежит на дуге, находящейся в полуплоскости полукасательной SC. Поэтому центральный угол, соответствующий углу SCB совпадает с центральным углом, соответствующим углу CAB (опр. 70 и 71).

Треугольники SAC и SCB подобны. У них угол S общий, а углы CAB и BCS равны, так как измеряются половиной одного и того же центрального угла (т. 71 и 72). Из подобия треугольников следует пропорция $\frac{CS}{AS} = \frac{SB}{SC}$. Отсюда $AS \cdot BS = CS^2$.

Теорема доказана.

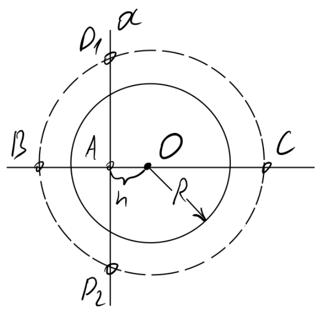
Из теоремы 83 следует, что *произведения отрезков секущих, проведённых из одной точки, равны.*

5. Пересечение прямой с окружностью

Теорема 84. Пусть даны окружность радиуса R с центром O и прямая a, которая проходит на расстоянии h от центра окружности. Тогда прямая не пересекает окружность, если $h > R$; прямая касается окружности, если $h = R$; прямая пересекает окружность в двух точках, если $h < R$.

Доказательство. Если $h > R$, то каждая точка прямой находится на расстоянии, большем R от центра окружности. Следовательно, такая точка не может принадлежать окружности, то есть прямая и окружность не пересекаются.

Если $h = R$, то основание перпендикуляра, опущенного из центра окружности на прямую, лежит на окружности. В этой точке прямая касается окружности по определению касательной.



Рассмотрим случай $h < R$. Проведём прямую OA, перпендикулярную прямой a. Отложим от точки A на прямой a отрезки AD_1 и AD_2, равные $\sqrt{R^2 - h^2}$. Тогда из равенства треугольников OAD_1 и OAD_2 получаем, что $OD_1 = OD_2$. Проведём окружность из центра O радиусом $OD_1 = OD_2$. Эта окружность пересекает прямую a в точках D_1 и D_2.

Вычислим радиус построенной окружности. Обозначим его через x. Отложим на полупрямой OA отрезок $OB = x$, а на полупрямой дополнительной OA отрезок $OC = x$. Точки B и C принадлежат окружности с радиусом x. Поскольку в прямоугольном треугольнике OAD_1 $OA < OD_1$ заключаем, что $OA < x$, значит, точка A лежит между точками O и B. Тогда так как $OA = h$, то $AB = x - h$, $AC = x + h$.

По теореме 82 $AB \cdot AC = AD_1 \cdot AD_2$. Поскольку $AD_1 \cdot AD_2 = R^2 - h^2$ и $AB \cdot AC = (x - h)(x + h)$, получаем равенство $x^2 - h^2 = R^2 - h^2$, то есть $x = R$.

Таким образом, построенная окружность совпадает с данной, и, следовательно, данная окружность пересекает прямую *a* в двух точках, D_1 и D_2.

Прямая *a* не может иметь других точек пересечения с окружностью, кроме D_1 и D_2. Действительно, если бы такая точка была, обозначим её P_1, то симметричная ей точка P_2 относительно диаметра *BC* тоже была бы на окружности (т. 67). По теореме 82 $AP_1 \cdot AP_2 = AB \cdot AC = AD_1 \cdot AD_2$. Так как $AD_1 = AD_2$, $AP_1 = AP_2$, то $AP_1 = AD_1$. А это значит, что точка P_1 совпадает либо с D_1, либо с D_2. Теорема доказана.

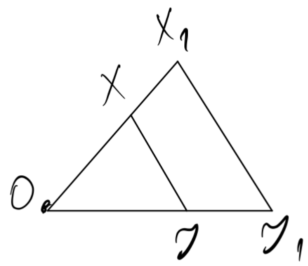
6. Гомотетия. Подобие фигур

Определение 77. *Преобразованием подобия* называется взаимно однозначное отображение плоскости на себя, при котором для любых двух точек *X*, *Y* и соответствующих им точек X_1, Y_1 выполняется соотношение $X_1Y_1 = k \cdot XY$, причём число *k* не зависит от выбора точек *X* и *Y*. Число *k* называется *коэффициентом подобия.*

Определение 78. Пусть *O* – произвольная точка плоскости. Поставим в соответствие каждой точке *X* плоскости точку X_1 по следующему правилу. Если точка *X* совпадает с *O*, то X_1 есть точка *O*. Если *X* отлична от *O*, то X_1 лежит на полупрямой *OX* на расстоянии $k \cdot OX$ от точки *O*, то есть $OX_1 = k \cdot OX$, где *k* – положительное число. Преобразование плоскости, при котором точке *X* сопоставляется таким образом точка X_1, называется *гомотетией*. Точка *O* называется *центром гомотетии*, а число *k* – *коэффициентом гомотетии*.

Теорема 85. Гомотетия есть преобразование подобия.

Доказательство. Пусть *X* и *Y* – две произвольные точки плоскости, не лежащие на одной прямой с точкой *O*. Треугольники *OXY* и OX_1Y_1 подобны, так как у них угол *O* общий, а $\dfrac{OX_1}{OX} = \dfrac{OY_1}{OY} = k$ (опр. 78). Из подобия треугольников следует, что отношение $\dfrac{X_1Y_1}{XY}$ равно *k*, откуда $X_1Y_1 = k \cdot XY$.



Рассмотрим случай, когда точки *O, X, Y* лежат на одной прямой. Введём на этой прямой координаты, выбрав точку *O* за начало координат. Обозначим *x* и *y* координаты точек *X, Y*, а x_1 и y_1 – координаты точек X_1, Y_1. Тогда по определению гомотетии $x_1 = kx$ и $y_1 = ky$. Получаем, что $X_1Y_1 = |y_1 - x_1| = |ky - kx| = k \cdot |y - x| = k \cdot XY$.

Наконец, если одна из исходных точек совпадает с точкой *O*, то по определению гомотетии имеем: $OY_1 = k \cdot OY$. Значит, гомотетия есть преобразование подобия (опр. 77). Теорема доказана.

Теорема 86. При преобразовании подобия точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.
Доказательство. Пусть точки A, B, C, лежащие на прямой, переходят в точки A_1, B_1, C_1. Докажем, что тогда точки A_1, B_1, C_1 тоже лежат на одной прямой, и если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

Пусть точка B лежит между точками A и C. Тогда по определению подобия $A_1C_1 = k \cdot AC = k(AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A_1B_1 + B_1C_1$. То есть,

$$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1.$$

Значит, точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой и если точка B лежит между A и C, то точка точка B_1 лежит между A_1 и C_1 (следствие из т. 41). Теорема доказана.

Пусть задано некоторое преобразование плоскости. Тогда, если F – произвольная фигура на плоскости, точки, соответствующие при преобразовании точкам фигуры F, образуют некоторую фигуру F_1. Будем говорить, что преобразование *переводит* фигуру F в фигуру F_1.

Из теоремы 86 следует, что *преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые – в полупрямые, отрезки – в отрезки*.

Докажем, что *преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми*. Действительно, пусть неразвёрнутый угол ABC преобразованием подобия переводится в угол $A_1B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по теореме 72, следовательно, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Определение 79. Две фигуры F и F_1 называются *подобными*, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия.

Из свойств преобразования подобия следует, что *у подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны*.

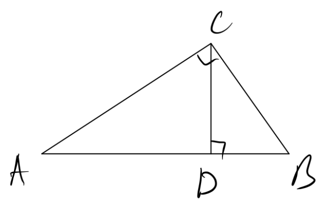
Покажем, что подобие треугольников, определяемое через преобразование подобия, и подобие по определению 75, эквивалентны. То есть, если треугольники подобны по определению 75, то они подобны и по определению 79, как и наоборот. Если треугольник ABC преобразованием подобия переводится в треугольник $A_1B_1C_1$, то по теореме 72 эти треугольники подобны в смысле определения 75. Пусть $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ по определению 75. Отложим на полупрямых AB и AC отрезки AB_2 и AC_2, равные отрезкам A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Треугольник AB_2C_2 равен треугольнику $A_1B_1C_1$ по первому признаку. Проведём преобразование плоскости при котором сначала треугольник $A_1B_1C_1$ движением переводится в треугольник AB_2C_2, а затем треугольник AB_2C_2 гомотетией с центром A и коэффициентом $k = \frac{AB}{AB_2}$ переводится в треугольник ABC. Так как при движении расстояния между точками сохраняются, а при гомотетии все расстояния изменяются в k раз, то в результате указанного преобразования плоскости расстояния между соответствующими точками тоже изменяются в k раз. Следовательно, данное преобразование является преобразованием подобия, переводящим треугольник $A_1B_1C_1$ в треугольник ABC. То есть эти треугольники подобны по определению 79.

§12. Теорема Пифагора и её применения

1. Теорема Пифагора

Теорема 87 (Пифагора). В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство. Пусть ABC – данный прямоугольный треугольник с прямым углом C. Проведём высоту CD. По теореме 80 $AC^2 = AD \cdot AB$, $BC^2 = BD \cdot AB$. Складывая эти равенства почленно, получим



$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + BD).$$

Так как точка D лежит между A и B (лемма 11), то $AD + BD = AB$. Поэтому

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

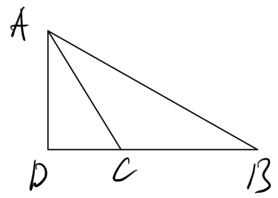
Теорема доказана.

2. Соотношения в косоугольном треугольнике

Непрямоугольный треугольник называется *косоугольным*.

Теорема 88. В любом косоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением одной из этих сторон на проекцию другой стороны.

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник с тупым углом C. Проведём высоту AD. Докажем сначала, что точка C лежит между B и D. Действительно, если точки B и D не разделяются точкой C, то в прямоугольном треугольнике ADC угол C тупой. А это невозможно. Итак, точка C разделяет точки B и D, то есть лежит между ними.



Применим теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам ADB и ADC, получим

$$AB^2 = AD^2 + BD^2,$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

Вычитая эти равенства почленно, будем иметь $AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2$.

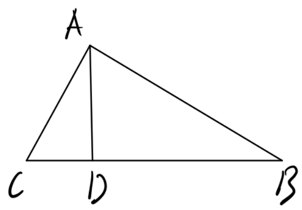
Так как точка C лежит между точками B и D, то $BD = BC + DC$. Заменяя в полученном равенстве BD^2 на $(BC + DC)^2$, после упрощений получаем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD.$$

Теорема доказана.

Теорема 89. В любом косоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон на проекцию другой стороны.

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник с острым углом C. Проведём высоту AD. Прежде всего замечаем, что точка C не разделяет точки B и D. Действительно, в противном случае у прямоугольного треугольника ADC с прямым углом D внешний угол при вершине C был бы острый. А это невозможно. Поэтому либо точка D лежит между C и B, либо точка B лежит между C и D. Пусть для определённости точка D лежит между C и B, как изображено на рисунке.



Применяя теорему Пифагора к треугольникам ADC и ADB, получим

$$AB^2 = BD^2 + AD^2,$$

$$AC^2 = CD^2 + AD^2.$$

Вычитая эти равенства почленно, будем иметь $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

Так как точка D лежит между B и C, то $BC = BD + CD$, то есть $BD = BC - CD$.

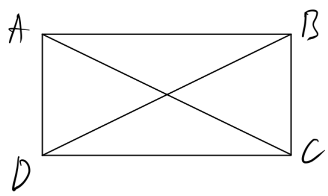
Заменяя в полученном равенстве BD^2 на $(BC - CD)^2$ и упрощая, получим

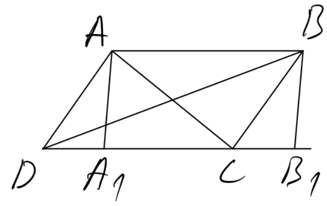
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD.$$

Если точка B лежит между C и D, доказательство аналогично. Теорема доказана.

3. Соотношение между диагоналями и сторонами параллелограмма

Теорема 90. В любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.





Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм, AC и BD – его диагонали. Если параллелограмм является прямоугольником, то по теореме Пифагора

$$AC^2 = AD^2 + DC^2,$$

$$BD^2 = BC^2 + DC^2.$$

Складывая эти равенства почленно и замечая, что $DC = AB$, получим

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Пусть теперь параллелограмм не является прямоугольником. Опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 на прямую CD. Из равенства треугольников ADA_1 и BCB_1 следует, что $DA_1 = CB_1$.

Углы ADC и BCD, как внутренние односторонние при параллельных AD и BC, дополняют друг друга до 180°. Поэтому если один из углов острый, то другой –

тупой. Пусть для определённости угол ADC острый, а угол BCD тупой, как изображено на рисунке.

Применяя теорему 88 к треугольнику BCD и теорему 89 к треугольнику ADC, получим

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2DC \cdot CB_1,$$
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2DC \cdot DA_1.$$

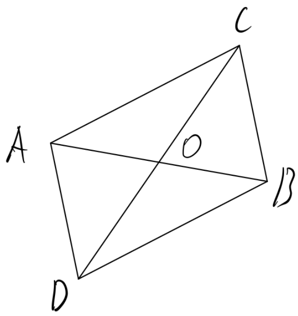
Складывая эти равенства почленно и замечая, что $CB_1 = DA_1$, $AB = CD$, получим

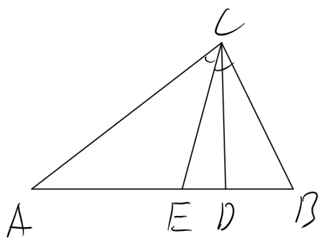
$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Теорема доказана.

4. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Задача. Дан треугольник ABC. Выразить медиану, биссектрису и высоту треугольника, проведённые из вершины C, через стороны треугольника.





1) Начнём с медианы треугольника. Пусть O – основание медианы. Построим точку D, симметричную точке C относительно точки O, тогда $OD = OC$. Применяя теорему 90 к параллелограмму $ACBD$, получим

$$AB^2 + (2OC)^2 = 2AC^2+2BC^2.$$

Отсюда находим медиану OC.

2) Найдём биссектрису CE. Согласно теореме 81 точка E делит сторону AB на отрезки, пропорциональные сторонам AC и BC. Это позволяет, зная AB, AC и BC, найти AE и EB. Допустим, что они уже найдены. Применяя теорему 88 или 89 к треугольникам ABC и AEC, получим

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \pm 2AB \cdot AD,$$
$$EC^2 = AC^2 + AE^2 \pm 2AE \cdot AD.$$

Умножая первое равенство на AE, а второе на AB и вычитая их почленно, получим уравнение, содержащее только одно неизвестное – биссектрису EC. Из этого уравнения и находится биссектриса.

3) Найдём высоту CD. Прежде всего по теореме 88 или 89 находим отрезок AD. Затем из прямоугольного треугольника ADC находим высоту CD.

5. Существование треугольника с данными сторонами

Теорема 91. Каковы бы ни были три числа *a, b, c* такие, что сумма любых двух из этих чисел больше третьего, существует треугольник со сторонами, равными *a, b, c.*

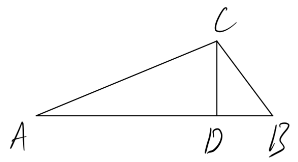
Доказательство. Расположим числа *a, b, c* в порядке возрастания. Пусть для определённости $a \le b \le c$. Обозначим

$$a_1 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

Число $a_1 > 0$, так как $c \ge b$. Число a_1 меньше a. В самом деле,

$$a - a_1 = a - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 - (c-a)^2}{2c}.$$

Так как $a + b > c$, то $b > c - a \ge 0$. Поэтому $b^2 > (c - a)^2$. Следовательно, $a > a_1$.



Построим треугольник *ABC* следующим образом. Возьмём отрезок *AB*, равный *c*. Из точки *B* на полупрямой *BA* отложим отрезок *BD*, равный a_1. Из точки *D* восстановим перпендикуляр *DC*, равный $\sqrt{a^2 - a_1^2}$. Утверждаем, что треугольник *ABC* имеет стороны *a, b, c*.

Действительно, сторона *AB* равна *c*. Применяя теорему Пифагора к треугольнику *BDC*, получим

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = a_1^2 + (\sqrt{a^2 - a_1^2})^2 = a^2,$$

то есть $BC = a$. Применяя теорему 89 к треугольнику *ABC*, получим $AC^2 = a^2 + c^2 - 2ca_1 = b^2$, то есть $AC = b$. Теорема доказана.

6. Взаимное расположение двух окружностей

Теорема 92. Пусть даны две различные окружности с центрами O_1 и O_2, радиусами R_1 и R_2, такими, что $R_1 \le R_2$, и расстоянием между центрами *d*. Тогда:

1) окружности не имеют общих точек, если

$$R_1 + R_2 < d \text{ или } R_2 - R_1 > d;$$

2) окружности имеют одну общую точку в которой они касаются, то есть имеют общую касательную, если

$$R_1 + R_2 = d \text{ или } R_2 - R_1 = d;$$

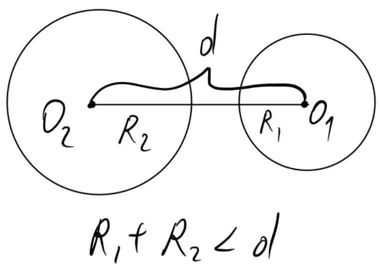
3) окружности пересекаются в двух точках, если

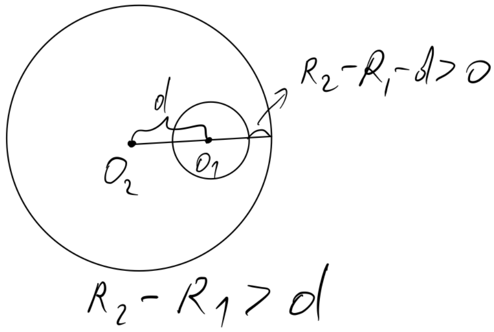
$$R_1 + R_2 > d \text{ и } R_2 - R_1 < d.$$

При этом точки пересечения окружностей симметричны относительно прямой, проходящей через их центры.

Доказательство. 1) Докажем первое утверждение теоремы.

Допустим, что окружности пересекаются и, следовательно, имеют общую точку *A* (¬). Рассмотрим возможные расположения точек *A, O*$_1$ и *O*$_2$.





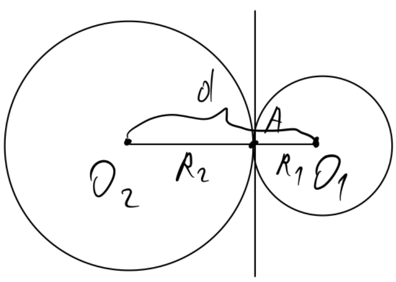
Если точки A, O_1 и O_2 не лежат на одной прямой, то существует треугольник AO_1O_2 для сторон которого выполняется условие $O_1A + O_2A > O_1O_2 \Rightarrow R_1 + R_2 > d$, что противоречит условию $R_1 + R_2 < d$. Также для сторон треугольника AO_1O_2 выполняется условие $O_1O_2 + O_1A > O_2A \Rightarrow d + R_1 > R_2 \Rightarrow R_2 - R_1 < d$, что противоречит условию $R_2 - R_1 > d$ $\otimes$.

Пусть точки A, O_1 и O_2 лежат на прямой. Если точка A лежит между O_1 и O_2, то $O_1A + AO_2 = O_1O_2 \Rightarrow R_1 + R_2 = d$. Это противоречит условию $R_1 + R_2 < d$. Проверим условие $R_2 - R_1 > d$. Так как $R_1 + R_2 = d$, то $R_2 - R_1 > R_1 + R_2 \Rightarrow -R_1 > R_1$, что невозможно. Следовательно, условие $R_2 - R_1 > d$ тоже не выполняется.

Если точка O_1 лежит между A и O_2, то $O_1A + O_1O_2 = AO_2 \Rightarrow R_1 + d = R_2 \Rightarrow R_2 - R_1 = d$. Это противоречит условию $R_2 - R_1 > d$. Проверим условие $R_1 + R_2 < d$. Так как $R_2 - R_1 = d$, то $R_1 + R_2 < R_2 - R_1 \Rightarrow R_1 < -R_1$, что невозможно. Следовательно, условие $R_1 + R_2 < d$ тоже не выполняется.

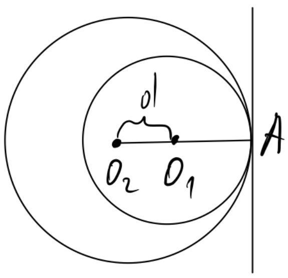
Если точка O_2 лежит между A и O_1, то $O_2A + O_2O_1 = AO_1 \Rightarrow R_2 + d = R_1$, что противоречит условию $R_1 \leq R_2$ $\otimes$. Таким образом, окружности не могут иметь общей точки A.

2) Докажем второе утверждение теоремы. Точно так же, как в первом случае, доказывается, что окружности не могут иметь общей точки A, не лежащей на прямой O_1O_2.



Пусть выполняется условие $R_1 + R_2 = d \Rightarrow R_2 < d$. Отложим на полупрямой O_2O_1 отрезок $O_2A = R_2$. Тогда точка A принадлежит окружности с центром O_2 и лежит между точками O_1 и $O_2 \Rightarrow O_1A + O_2A = O_1O_2 \Rightarrow O_1A = O_1O_2 - O_2A \Rightarrow O_1A = d - R_2 = R_1 \Rightarrow$ точка A принадлежит и окружности с центром O_1. Построим прямую, проходящую через точку A перпендикулярно O_1O_2. Эта прямая по определению будет касательной к обеим окружностям.

Допустим, что существует ещё одна точка A_1, общая для двух окружностей и лежащая на прямой O_1O_2. Если точка O_1 лежит между A_1 и O_2, то $O_1A_1 + O_2O_1 = A_1O_2$ $\Rightarrow R_1 + d = R_2 \Rightarrow d = R_2 - R_1$. С учётом условия $R_1 + R_2 = d$, получаем $R_1 = -R_1$, что невозможно. Аналогично проверяется случай, когда точка O_2 лежит между A_1 и O_1. Если точка A_1 лежит между O_1 и O_2, то $O_1A_1 = O_1A$, то есть точка A_1 совпадает с A в соответствии с аксиомой V.



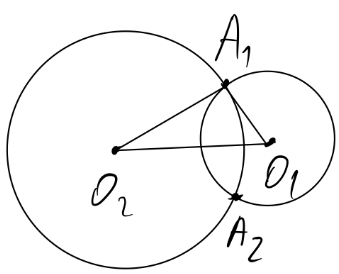
Пусть выполняется условие $R_2 - R_1 = d \Rightarrow R_2 = d + R_1 \Rightarrow R_2 < d.$

Отложим на полупрямой O_2O_1 отрезок $O_2A = R_2$. Тогда точка A принадлежит окружности с центром O_2 и так как $R_2 < d$, то O_1 лежит между O_2 и $A \Rightarrow O_1O_2 + O_1A = O_2A \Rightarrow O_1A = O_2A - O_1O_2 =$ $R_2 - d = R_1 \Rightarrow$ точка A лежит и на окружности с центром O_1.

Построим прямую, проходящую через точку A перпендикулярно O_1O_2. Эта прямая по определению будет касательной к обеим окружностям.

Допустим, что существует ещё одна точка A_1, общая для двух окружностей и лежащая на прямой O_1O_2. Если точка A_1 лежит между O_1 и O_2, то $A_1O_1 + A_1O_2 = O_1O_2$ $\Rightarrow R_1 + R_2 = d$, что противоречит условию $R_2 - R_1 = d$ так как тогда $R_2 - R_1 = R_1 + R_2$ $\Rightarrow -R_1 = R_1$. Если точка O_2 лежит между A_1 и O_1, то $A_1O_2 + O_1O_2 = AO_1 \Rightarrow R_2 + d = R_1 \Rightarrow$ $R_2 - R_1 = -d$, что противоречит условию $R_2 - R_1 = d$. Если точка O_1 лежит между A_1 и O_2, то так как $O_2A = R_2$, точка A_1 совпадает с A.

3) Докажем третье утверждение теоремы. Заметим, что можно построить



треугольник со сторонами, равными R_1, R_2 и d. По условию $R_1 + R_2 > d$ и $R_2 - R_1 < d \Rightarrow R_1 + d > R_2$ и так как $R_1 \leq R_2$, то $R_2 + d > R_1$. Возьмём отрезок O_1O_2 за сторону, равную d и построим вершину A_1 так, чтобы $O_1A_1 = R_1$ и $O_2A_1 = R_2$ (как в док-ве т. 91). Тогда точка A_1 принадлежит обеим окружностям. Зеркально отразим A_1 относительно прямой O_1O_2, получим точку A_2. По свойству симетрии $O_1A_2 = O_1A_1$ $= R_1$ и $O_2A_2 = O_2A_1 = R_2$, значит, A_2 тоже принадлежит обеим окружностям. Таким образом, точки A_1 и A_2 являются точками пересечения данных окружностей.

Докажем, что окружности не имеют других точек пересечения. Допустим, что существует ещё одна точка A, принадлежащая обеим окружностям. Аналогично случаю 1 доказывается, что точка A не может лежать на прямой O_1O_2. Значит, A

лежит либо в полуплоскости точки A_1, либо в полуплоскости точки A_2. Пусть, например, точка A лежит в полуплоскости точки A_1. Тогда $\Delta O_1O_2A_1 = \Delta O_1O_2A$ по третьему признаку. Из равенства треугольников следует, что $\angle O_1O_2A_1 = \angle O_1O_2A \Rightarrow$ лучи O_2A_1 и O_2A совпадают, а из равенства $O_2A_1 = O_2A$ следует, что точка A совпадает с точкой A_1. Таким образом, окружности имеют только две общие точки. Теорема доказана.

§13. Геометрические построения

1. Инструменты построения

Построение геометрической фигуры является основным (неопределяемым) понятием. Помимо слова «построить» используются разнообразные синонимы: «провести» (прямую), «описать» (окружность), «отложить» (отрезок) и другие.

Построение выполняется с помощью *инструментов* – линейки и циркуля.

Линейка как инструмент геометрических построений позволяет провести прямую. В частности, линейкой можно построить произвольную прямую; произвольную прямую, проходящую через построенную точку; прямую, проходящую через две построенные точки.

Если построены две точки и проходящая через них прямая, то построен отрезок с концами в этих точках и полупрямые, определяемые этими точками. Таким образом, с помощью линейки можно построить отрезок, соединяющий две построенные точки, и полупрямую, исходящую из построенной точки и проходящую через другую построенную точку.

Циркуль как инструмент геометрических построений позволяет описать окружность. При этом центр окружности может быть произвольным или уже построенным; радиус окружности может быть произвольным или равным построенному отрезку.

Задача на построение фигуры считается решённой, если указана конечная последовательность осуществимых построений (алгоритм построения), и доказано, что в результате выполнения указанных построений получается фигура с требуемыми свойствами.

Решая задачи на построение придерживаются следующих правил.

1) В условии задачи на построение каждая данная фигура считается построенной.
2) Если построены две фигуры, то построена и общая часть этих фигур (например, их точки пересечения).
3) Можно построить произвольную точку заведомо принадлежащую построенной фигуре или заведомо не принадлежащую построенной фигуре.

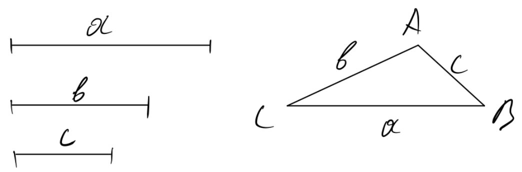
Замечание. Благодаря третьему правилу можно считать, что линейка позволяет проводить прямую только через две построенные точки, а циркуль позволяет построить окружность только с построенным центром и данным радиусом. Произвольные прямые и окружности с произвольным центром и радиусом можно построить, выбрав с помощью правила 3 произвольные точки плоскости.

Задача 0. Отложить на данной прямой от данной точки отрезок, равный данному отрезку.
Пусть O – данная точка прямой a, CD – данный отрезок.
Построим окружность с центром O и радиусом CD. Обозначим A и B точки пересечения окружности с прямой a. Отрезки OA и OB искомые.

Таким образом, циркулем можно отложить от построенной точки на построенной прямой отрезок, равный построенному отрезку.

2. Основные задачи на построение

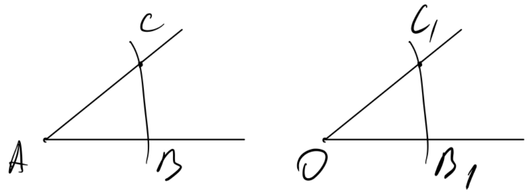
Задача 1. Построить треугольник с данными сторонами *a, b, c*.



1) Проведём произвольную прямую и отметим на ней произвольную точку B.
2) Отложим на прямой отрезок BC, равный a.
3) Построим окружность с центром B и радиусом b.
4) Построим окружность с центром C и радиусом c. Обозначим A точку пересечения двух окружностей.
5) Проведём отрезки AB и AC.

Треугольник ABC имеет стороны, равные *a, b, c*, то есть является искомым. Задача имеет решение если отрезки *a, b, c* удовлетворяют условиям теоремы 91.

Задача 2. Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.

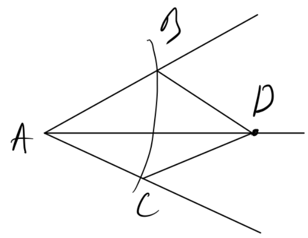


Пусть $\angle A$ – данный угол, O – начальная точка данной полупрямой.
1) Проведём произвольную окружность с центром в вершине A данного угла. Обозначим B и C точки пересечения окружности со сторонами угла.
2) Проведём окружность радиуса AB с центром в точке O (начальной точке данной полупрямой). Обозначим B_1 точку пересечения окружности с полупрямой.

3) Построим окружность с центром B_1 и радиусом BC. Обозначим C_1 точку пересечения двух окружностей, лежащую в данной полуплоскости.
4) Построим полупрямую OC_1.

Из равенства треугольников ABC и OB_1C_1 (по третьему признаку) следует, что угол C_1OB_1 равен углу A, то есть является искомым.

<u>Задача 3</u>. Построить биссектрису данного неразвёрнутого угла.



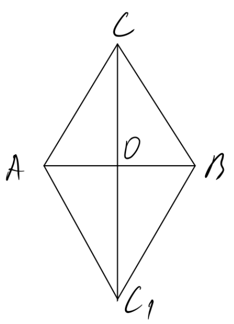
Пусть $\angle A$ – данный угол.

1) Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Обозначим B и C точки пересечения окружности со сторонами угла.
2) Построим окружности с центрами B и C с тем же радиусом. Обозначим D их точку пересечения, отличную от точки A.
3) Построим полупрямую AD.

Докажем, что точка D будет существовать. Так как данный угол неразвёрнутый, существует треугольник ABC в котором $BC < AB + AC$, то есть расстояние между центрами проводимых на втором шаге окружностей меньше суммы их радиусов. Разность радиусов построенных окружностей равна нулю, следовательно, она меньше расстояния между их центрами. Значит, выполняются условия пункта 3 теоремы 92.

Из равенства треугольников ABD и ACD следует, что $\angle BAD = \angle CAD$. Докажем теперь, что полупрямая AD проходит между сторонами угла BAC. Точки D и A лежат в разных полуплоскостях относительно BC (т. 92), тогда отрезок AD пересекает прямую BC в некоторой точке O. Из равенства треугольников BAO и CAO по первому признаку следует, что $CO = BO$, следовательно, точка O – является серединой отрезка BC, то есть принадлежит ему (след. т. 6 и опр. 6). Значит, полупрямая AD разделяет стороны угла BAC и является искомой биссектрисой.

<u>Задача 4</u>. Разделить отрезок пополам.



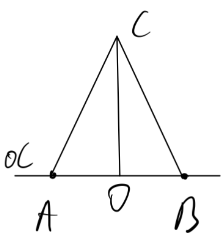
Пусть AB – данный отрезок.

1) Проведём окружности радиуса AB с центрами A и B. Сумма радиусов окружностей больше AB, а разность равна нулю. Значит, по теореме 92 эти окружности имеют две точки пересечения, лежащие по разные стороны от прямой AB. Обозначим эти точки C и C_1.
2) Построим прямую CC_1, она пересечёт прямую AB в точке O.

$\Delta CAC_1 = \Delta CBC_1$ по третьему признаку $\Rightarrow \angle ACO = \angle BCO \Rightarrow \Delta ACO =$

ΔBCO по первому признаку $\Rightarrow AO = BO \Rightarrow O$ – искомая середина AB.

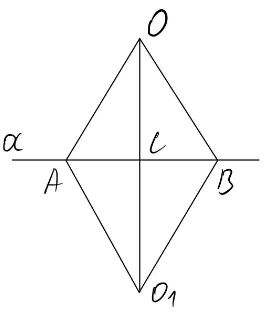
Задача 5. Из данной точки O, лежащей на прямой a, построить прямую, перпендикулярную a.



1) Из точки O проведём произвольным радиусом окружность. Обозначим A и B точки пересечения этой окружности с прямой a.
2) Проведём окружности с радиусом AB и центрами A и B. По теореме 92 эти окружности пересекаются ($2AB > AB$ и $AB - AB < AB$). Обозначим C одну из их точек пересечения.
3) Построим прямую OC.

$\Delta ACO = \Delta BCO$ по третьему признаку $\Rightarrow$ смежные углы COA и COB равны $\Rightarrow$ эти углы прямые $\Rightarrow OC$ – искомая прямая.

Задача 6. Через данную точку O, не лежащую на данной прямой a, провести прямую, перпендикулярную прямой a.



1) Отметим произвольную точку A прямой a. Построим окружность с центром O и радиусом OA. Эта окружность пересечёт прямую a ещё в одной точке B (если только нам не повезло так, что OA это и есть искомая прямая).
2) Построим окружности с тем же радиусом и центрами A и B. Так как точки A, O, B не лежат на одной прямой, то $AB < AO + OB$ и $AO - OB = 0 < AB$, следовательно, выполняются условия пункта 3 теоремы 92, то есть окружности пересекаются в двух точках. Обозначим O_1 их точку пересечения, отличную от точки O. Точки O и O_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a.
3) Проведём прямую OO_1. Обозначим C – точку пересечения этой прямой и a.

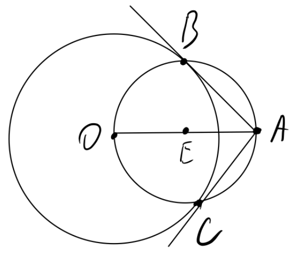
$\Delta AOO_1 = \Delta BOO_1$ по третьему признаку $\Rightarrow \angle AOO_1 = \angle BOO_1 \Rightarrow \Delta AOC = \Delta BOC$ по первому признаку $\Rightarrow$ смежные углы ACO и BCO равны $\Rightarrow$ эти углы прямые $\Rightarrow OO_1$ – искомая прямая.

3. Примеры решения задач на построение

Задача 7. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.
Пусть B – данная точка, a – данная прямая.

1) Проведём через точку B прямую b, перпендикулярную прямой a (задача 6).
2) Проведём через точку B прямую, перпендикулярную b. Эта прямая и есть искомая.

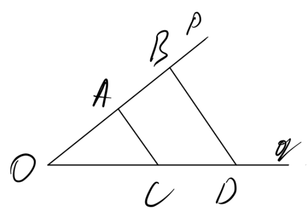
Задача 8. Построить касательные к данной окружности с центром *O*, которые проходят через данную точку *A*, лежащую на расстоянии большем радиуса окружности от *O*.



1) Проведём отрезок *OA* и разделим его пополам (задача 4). Обозначим *E* – середину *OA*.
2) Построим окружность с центром *E* и радиусом *EA*. Обозначим *B* и *C* точки пересечения этой окружности с данной.
3) Проведём полупрямые *AB* и *AC*.

Углы *OBA* и *OCA* прямые, так как опираются на диаметр построенной окружности, следовательно, *AB* и *AC* – искомые касательные.

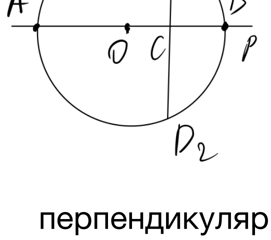
Задача 9. Даны три отрезка *a, b, c*. Построить отрезок $x = \frac{bc}{a}$.



1) Проведём произвольную прямую и отметим точку *O*, лежащую на этой прямой и некоторую точку, не лежащую на этой прямой.
2) Через две построенные точки проведём ещё одну прямую. Обозначим *p* и *q* – полупрямые с началом *O*, не лежащие на одной прямой.
3) На полупрямой *p* отложим отрезки *OA* = *a* и *OB* = *b*. На полупрямой *q* отложим отрезок *OC* = *c*.
4) Построим прямую *AC* и построим прямую, проходящую через точку *B* параллельно *AC* (задача 7). Обозначим *D* точку пересечения этой прямой с полупрямой *q*.

Из подобия треугольников *OAC* и *OBD* следует, что $\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA}$. Отсюда $OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{bc}{a}$. Таким образом, *OD* – искомый отрезок.

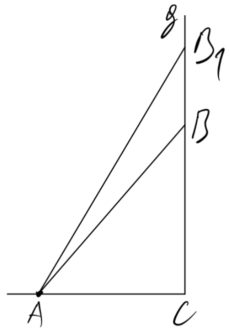
Задача 10. Даны два отрезка *a* и *b*. Построить отрезок $x = \sqrt{ab}$.



1) Проведём произвольную прямую *p* и отметим на ней точку *C*.
2) Отложим от точки *C* в разные стороны на прямой *p* отрезки *CA* = *a* и *CB* = *b*.
3) Разделим отрезок *AB* пополам и обозначим *O* его середину (задача 4).
4) Построим окружность с центром *O* и радиусом *OA*.
5) Построим прямую, проходящую через точку *C* и перпендикулярную *AB* (задача 5). Обозначим D_1 и D_2 точки пересечения этой прямой с окружностью.

Из равенства прямоугольных треугольников OCD_1 и OCD_2 следует, что $CD_1 = CD_2$, а по теореме 82 $CD_1 \cdot CD_2 = AC \cdot BC = ab$, следовательно, отрезок $CD_1 = \sqrt{ab}$ является искомым.

Задача 11. Даны отрезки a и b. Построить отрезки $\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 - b^2}$, если $a > b$.



1) Проведём произвольную прямую и отметим на ней точку A.
2) Отложим на прямой от точки A отрезок $AC = b$.
3) Проведём через точку C прямую g, перпендикулярную к прямой AC (задача 5).
4) Отложим на прямой g от точки C отрезок $CB_1 = a$. По теореме Пифагора отрезок $AB_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ является искомым.
5) Проведём окружность с центром A и радиусом a. Обозначим B точку пересечения этой окружности с прямой g. Тогда $CB = \sqrt{a^2 - b^2}$ второй искомый отрезок.

Задача 12. Разделить данный отрезок AB на n равных частей.

1) Проведём из точки A произвольную полупрямую a, отличную от AB.
2) Отложим на полупрямой a равные отрезки $AA_1, A_1A_2, A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$.
3) Проведём через точки A_n и B прямую b.
4) Проведём прямые, параллельные b и проходящие через точки $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$. Эти прямые пересекают отрезок AB в точках $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$, которые делят AB на n равных частей (т. 58).

4. Геометрическое место точек

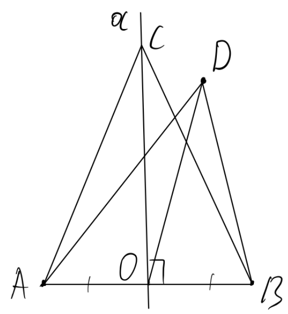
Определение 80. *Геометрическим местом точек* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определённым свойством.

Пример. Окружность является геометрическим местом точек, равноудалённых от данной точки (центра).

Теорема 93. Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек, есть прямая, проходящая через середину отрезка с концами в этих точках и перпендикулярная прямой, содержащей эти две точки.

Доказательство. Пусть A и B – данные точки, a – прямая, проходящая через середину O отрезка AB перпендикулярно прямой AB. Необходимо доказать, что каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B и что каждая точка D плоскости, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a.

То, что каждая точка C прямой a находится на одинаковом расстоянии от точек A и B, следует из равенства треугольников AOC и BOC. У этих треугольников углы при

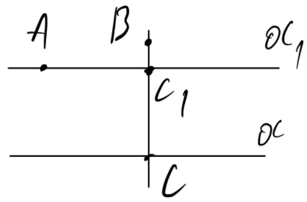


вершине O прямые, сторона OC общая, а $AO = OB$, так как O – середина отрезка AB. Покажем теперь, что каждая точка D плоскости, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a.

Рассмотрим треугольник ADB. Он равнобедренный, так как $AD = BD$, поэтому медиана DO является высотой. Следовательно, точка D принадлежит прямой, проходящей через точку O перпендикулярно прямой AB, то есть прямой a (т. 31). Теорема доказана.

Задача. Найти геометрическое место точек, расположенных в одной полуплоскости относительно прямой a и равноудалённых от этой прямой.

Возьмём какую-нибудь точку A геометрического места точек и проведём через неё прямую a_1, параллельно a. По теоремам 29 и 49 все точки прямой a_1 принадлежат искомому геометрическому месту точек. Докажем, что этой прямой оно и ограничивается.



Пусть B – произвольная точка геометрического места точек. Проведём через точку B прямую, перпендикулярную прямой a. Она пересечёт прямую a в некоторой точке C, а прямую a_1 в некоторой точке C_1. Так как точки C_1 и B не разделяются точкой C, то из равенства $C_1C = BC$ следует, что точки B и C_1 совпадают (акс. V), то есть точка B лежит на прямой a_1.

Геометрическое место точек плоскости, расположенных по одну сторону от данной прямой a и равноудалённых от этой прямой, есть прямая, параллельная a.

5. Метод геометрических мест

Сущность метода геометрических мест, используемого при решении задач на построение, состоит в следующем. Пусть, решая задачу на построение, нам надо найти точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура F_2. Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, то есть является их точкой пересечения. Если эти геометрические места простые (скажем, состоят из прямых и окружностей), то мы можем их построить и найти интересующую нас точку X.

Задача. Даны три точки: A, B, C. Постройте точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

Искомая точка *X* удовлетворяет двум условиям: 1) она одинаково удалена от точек *A* и *B,* 2) она находится на данном расстоянии от точки *C*. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть прямая, перпендикулярная отрезку *AB* и проходящая через его середину. Геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть окружность данного радиуса с центром в точке *C*. Искомая точка *X* лежит на пересечении этих геометрических мест.

Упражнения

§ 1 п. 3

1. Точки *A, B* и *C* лежат на одной прямой. Какая из этих точек лежит между двумя другими, если известны длины отрезков: *AB* = 4,6; *AC* = 8,4; *BC* = 3,8?
2. Могут ли точки *A, B* и *C* лежать на одной прямой, если *AB* = 5, *BC* = 7, *AC* = 6?
3. Точки *A, B* и *C* лежат на одной прямой. Длина отрезка *AB* равна 3,8, длина *AC* равна 2,4. Найдите длину отрезка *BC.*
4. Доказать, что если на полупрямой *AB* из её начальной точки *A* отложить отрезок *AC,* больший отрезка *AB*, то точка *B* будет лежать между точками *A* и *C*.
5. Отрезок *AB* = 5. На полупрямой *AB* отложен отрезок *AC* = 3. Как расположены точки *A, B* и *C*? Чему равна длина отрезка *BC?*
6. Даны четыре точки: *A, B, C* и *D*. Точки *A, B* и *C* лежат на одной прямой, и точки *B, C* и *D* тоже лежат на одной прямой. Докажите, что все четыре точки лежат на одной прямой.
7. Даны четыре прямые *a, b, c* и *d*. Прямые *a, b* и *c* пересекаются в одной точке, и прямые *b, c* и *d* тоже пересекаются в одной точке. Докажите, что все четыре прямые пересекаются в одной точке.

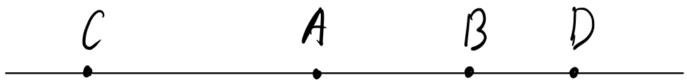
§ 1 п. 4

8. Прямая *AB* пересекает отрезок *CD,* а прямая *CD* пересекает отрезок *AB.* Докажите, что отрезки *AB* и *CD* пересекаются.
9. Дана прямая *a* и не лежащие на ней точки *A, B, C* и *D.* Отрезки *AB, BC* и *CD* пересекают прямую *a*. Пересекает ли прямую *a* отрезок *AD*? Обоснуйте ответ.
10. Дана прямая *a* и не лежащие на ней точки *A, B, C* и *D*. Отрезки *AB* и *CD* не пересекают прямую *a*, отрезок *BC* пересекает прямую *a*. Пересекает ли прямую *a* отрезок *AD*? Обоснуйте ответ.
11. Дана прямая *a* и не лежащие на ней точки *A, B, C* и *D*. Отрезки *AB*, *BC* и *CD* не пересекаются с прямой *a*. Пересекает ли прямую *a* отрезок *AD*? Обоснуйте ответ.

§ 1 п. 5

12. Отрезки *AB* и *CD* лежат на разных прямых и пересекаются в точке *O*. Доказать, что отрезок *BD* не пересекает прямую *AC*.
13. Дан треугольник *ABC*. На стороне *AC* взята точка *D*, а на стороне *BC* – точка *E*. Докажите, что отрезки *AE* и *BD* пересекаются.

14. Укажите пары совпадающих и дополнительных полупрямых на рисунке.



15. Точки *A, B, C* и *D* лежат на одной прямой. Точка *B* лежит между *A* и *C*, точка *C* лежит между *B* и *D*. Доказать, что точка *C* лежит между *A* и *D*.
16. Точки *B* и *D* лежат между точками *A* и *C*, точка *B* лежит между *A* и *D*. Доказать, что точка *D* лежит между *B* и *C*.

§ 1 п. 6
17. Пусть C_1 – середина отрезка *AB*, а C_2 середина отрезка *BD*. Докажите, что $AD = 2C_1C_2$.

§ 2 п. 1
18. Приведите пример, каковы должны быть градусные меры углов (*ab*), (*ac*) и (*bc*), чтобы луч *c* не мог проходить между сторонами угла (*ab*).

§ 2 п. 2
19. В треугольниках *FPL* и *MNK* $FP = MN$, $PL = NK$, $FL = MK$, $\angle F = \angle K$, $\angle P = \angle M$, $\angle L = \angle N$. Можно ли из этого сделать вывод, что треугольники равны?
20. В треугольниках *ABC* и AB_1C $AB = AB_1$ и $\angle BAC = \angle B_1AC$. Доказать, что $BC = B_1C$.
21. Точка *E* лежит на прямой *AB* между точками *A* и *B*. Точка *C* лежит на прямой *BD* между точками *B* и *D*. $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 3$, $AE = 2$, $CD = 2$. Найти длину *ED*.

§ 2 п. 3
22. Пусть прямые *a* и *b* пересекаются в точке *A*. Точка *E* не принадлежит прямым *a* и *b*. Докажите, что через точку *E* можно провести прямую, не проходящую через точку *A* и пересекающую прямые *a* и *b*.
23. Угол *(ab)* равен 120°, а угол *(ac)* равен 150°. Чему равен угол *(bc)*, если лучи *b* и *c* расположены в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч *a*? Чему равен угол *(bc)*, если лучи *b* и *c* расположены в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч *a*?
24. Чему равны смежные углы, если один из них в два раза больше другого?
25. Чему равны смежные углы, если один из них на 30° градусов больше другого?

§ 3 п. 1
26. Отрезки *AB* и *CD* пересекаются в точке *O*. Докажите, что углы *AOC* и *BOD* вертикальные.

§ 3 п. 2

27. Один из углов, которые получаются в пересечении двух прямых, равен 60°. Найти остальные углы.

§ 4 п. 3

28. Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.
29. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медианы (и биссектрисы), проведённые к боковым сторонам, равны.
30. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

§ 5 п. 1

31. Докажите, что в любом треугольнике два внешних угла тупые.
32. Докажите, что две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекаются.

§ 5 п. 2

33. На стороне *AB* треугольника *ABC* взята точка *D*. Докажите, что отрезок *CD* меньше по крайней мере одной из сторон, *AC* или *BC*.
34. Докажите, что любой отрезок с концами на сторонах треугольника не больше наибольшей из сторон треугольника.

§ 5 п. 3

35. Может ли треугольник *ABC* иметь стороны $AB = 7$ *см*, $BC = 10$ *см* и $AC = 18$ *см*? Обосновать ответ.
36. Доказать, что если $AB = BC + AC$, то три точки *A, B, C* лежат на одной прямой.
37. Пусть *BO* – медиана треугольника *ABC*, проведённая к стороне *AC*. Докажите, что медиана *BO* меньше полусуммы сторон *BA* и *BC*.

§ 6 п. 3

38. Докажите, что равные наклонные, проведённые из одной точки к данной прямой, имеют равные проекции. И обратно, если у наклонных проекции равны, то равны и сами наклонные.
39. Докажите, что высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой и высотой.
40. Как провести через вершину *A* треугольника *ABC* прямую, пересекающую сторону *BC*, чтобы расстояния вершин *B* и *C* от этой прямой были одинаковы?
41. Докажите, что две биссектрисы треугольника пересекаются в точке, которая одинаково удалена от всех сторон треугольника.
42. Докажите, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
43. Из точки *B* к прямой *a* проведена наклонная *BC*. Докажите, что из точки *B* можно провести другую наклонную *BD* той же длины, что и *BC*.

44. Докажите, что из данной точки к данной прямой нельзя провести трёх наклонных одинаковой длины.
45. Из точки *B* проведены к прямой *a* перпендикуляр *BA* и две наклонные *BC* и *BD*. Точка *D* лежит между *A* и *C*. Докажите, что угол *BDC* – тупой.
46. Докажите, что из двух наклонных, проведённых из одной точки к данной прямой, больше та, у которой больше проекция. И обратно, у большей наклонной большая проекция.

§ 7 п. 2
47. Что больше, основание или боковая сторона равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен 57°?
48. Чему равны углы треугольника, если они относятся как 1 : 2 : 3?
49. Чему равны углы равнобедренного прямоугольного треугольника?

§ 7 п. 3
50. Дан треугольник *ABC*. Как провести через вершину *A* прямую, не пересекающую сторону *BC*, чтобы вершины *B* и *C* находились на одинаковом расстоянии от этой прямой.

§ 7 п. 4
51. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с острым углом 30° катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.
52. Пусть *ABC* – равнобедренный треугольник с основанием *AB* и боковыми сторонами *AC* и *BC*. Доказать, что сумма расстояний произвольной точки *X*, взятой на основании *AB* от прямых *AC* и *BC*, постоянна.

§ 8 п. 1
53. Могут ли быть все углы выпуклого четырёхугольника тупыми?
54. Найти точку, сумма расстояний которой от вершин выпуклого четырёхугольника наименьшая.

§ 8 п. 2
55. Докажите, что если диагонали выпуклого четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам, то он параллелограмм.
56. Докажите, что если у выпуклого четырёхугольника противолежащие углы равны, то он параллелограмм.
57. В параллелограмме проведена биссектриса одного из углов. На какие отрезки она разбивает большую сторону параллелограмма, если его стороны 5 см и 6 см.

§ 8 п. 3
58. Докажите, что если у параллелограмма диагонали равны, то он есть прямоугольник.

59. Докажите, что выпуклый четырёхугольник, у которого все углы равны, есть прямоугольник.
60. Найти углы ромба, если одна из его диагоналей равна стороне.
61. Докажите, что если диагонали параллелограмма пересекаются под прямым углом, то он является ромбом.
62. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов параллелограмма являются вершинами квадрата.

§ 8 п. 5
63. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба, а середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.
64. Доказать, что три прямые, проведённые через вершины треугольника перпендикулярно противолежащим сторонам, пересекаются в одной точке.

§ 8 п. 6
65. Докажите, что прямая, соединяющая середины диагоналей трапеции, параллельна основаниям.
66. Треугольник расположен в одной полуплоскости относительно данной прямой. Доказать, что расстояние точки пересечения медиан треугольника от этой прямой равно среднему арифметическому расстояний вершин.

§ 9 п. 2
67. Доказать, что если при движении две точки A и B неподвижны, то все точки прямой AB неподвижны.
68. Доказать, что если три точки, не лежащие на одной прямой, неподвижны, то все точки неподвижны.

§ 9 п. 3
69. Доказать, что для совмещения любых двух равных отрезков достаточно не более чем двух зеркальных отражений.
70. Докажите, что если a и b – оси симметрии фигуры, то прямая, симметричная a относительно прямой b, тоже является осью симметрии фигуры.
71. Докажите, что если треугольник имеет ось симметрии, то он равнобедренный.
72. Дана прямая и две точки A и B, не лежащие на прямой. Найти на прямой точку C, сумма расстояний которой от точек A и B была бы наименьшей. Рассмотреть два случая: 1) точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой, 2) точки A и B лежат в одной полуплоскоскости относительно данной прямой.

§ 9 п. 4
73. Докажите, что у треугольника не может быть центра симметрии.

74. Докажите, что если *A* и *B* – центры симметрии фигуры, то точка A_1, симметричная *A* относительно *B*, тоже является центром симметрии. Поэтому у фигуры бесконечно много центров симметрии.

§ 9 п. 5

75. Докажите, что для получения любого движения достаточно не более чем трёх зеркальных отражений.

§ 9 п. 6

76. Докажите, что два зеркальных отражения, выполненные последовательно относительно двух параллельных прямых, дают параллельный перенос.
77. Докажите, что два последовательных преобразования симметрии, выполненные относительно точек *A* и *B*, дают параллельный перенос.

§ 10 п. 1

78. Докажите, что если прямая имеет с окружностью общую точку и не касается окружности в этой точке, то она имеет ещё одну общую точку с окружностью.
79. Докажите, что прямая не может пересекать окружность в трёх точках.

§ 10 п. 3

80. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Через точку *B* проведена произвольная прямая, пересекающая окружность в точках *X* и *Y*. Доказать, что угол *XAY* не зависит от взятой прямой.
81. Выпуклый четырёхугольник называется вписанным в окружность, если его вершины лежат на окружности. Доказать, что у вписанного четырёхугольника сумма противолежащих углов равна 180°.
82. Докажите, что отрезки касательных *AB* и *AC*, проведённых из одной точки к окружности, равны.
83. Выпуклый четырёхугольник называется описанным около окружности, если его стороны касаются окружности. Докажите, что у описанного четырёхугольника суммы противолежащих сторон одинаковы.

§ 10 п. 4

84. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками внутри треугольника не больше наибольшей из сторон треугольника.

§ 11 п. 1

85. Чему равны углы треугольника *ABC*, если он подобен треугольнику *BCA*?
86. Докажите, что если у двух равнобедренных треугольников углы при вершине равны, то треугольники подобны.
87. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 36°. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из вершины при основании, отсекает треугольник, подобный данному.

§ 11 п. 3

88. Основание биссектрисы, проведённой из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу в отношении $m:n$. Докажите, что основание высоты, проведённой из того же угла, делит гипотенузу в отношении $m^2:n^2$.

89. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает прямую AB в точке D. Доказать, что $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$.

§ 11 п. 4

90. Диагонали выпуклого четырёхугольника точкой пересечения делятся на отрезки, произведения которых равны. Доказать, что около четырёхугольника можно описать окружность (то есть провести окружность, проходящую через все вершины четырёхугольника).

§ 12 п. 1

91. Чему равна высота равностороннего треугольника со сторонами, равными 1 см?

92. Найти радиус вписанной и описанной окружности равностороннего треугольника со стороной, равной 1 см.

§ 12 п. 2

93. Докажите, что если в треугольника ABC имеет место неравенство $AB^2 < AC^2 + CB^2$, то угол C острый. Если $AB^2 > AC^2 + CB^2$, то угол C тупой.

94. Доказать, что из двух хорд окружности больше та, которая ближе к центру.

§ 12 п. 4

95. ABC – треугольник, D – основание биссектрисы, проведённой из вершины C. Докажите, что $CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD$.

96. Стороны треугольника a, b, c. Доказать, что высота h_a, опущенная на сторону a, определяется по формуле

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p – полупериметр треугольника, то есть $p = \frac{a+b+c}{2}$.

97. Найти основание равнобедренного треугольника с углом при вершине 36° и боковой стороной, равной 1 см.

§ 13 п. 2

98. Построить отрезок, равный сумме (разности) двух данных отрезков.

99. Построить угол, равный разности двух данных углов.

100. Построить отрезок, равный четверти данного отрезка.

101. Построить угол, равный четверти данного угла.

102. Построить треугольник *ABC* по следующим условиям: 1) дан угол *A* и стороны *AB* и *AC*; 2) дан угол *A* и стороны *AB* и *BC*; 3) даны углы *A* и *B* и сторона *AB*.
103. Построить треугольник по сторонам *AB, BC* и медиане, проведённой к одной из сторон *AB* и *AC*.
104. Построить треугольник по сторонам *AB*, *BC* и высоте, проведённой из вершины *A*.

§ 13 п. 3
105. Построить трапецию по четырём сторонам.
106. Построить отрезок $x = \frac{abc}{de}$, где *a, b, c, d, e* – данные отрезки.
107. Докажите геометричеки неравенство $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

§ 13 п. 4
108. Доказать, геометрическое место точек *C*, отношение расстояний которых от двух данных точек *A* и *B* постоянно и не равно единице, есть окружность.
109. Докажите, что геометрическое место точек, у которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек *A* и *B* постоянна, есть окружность с центром в середине отрезка *AB* и радиусом, равным половине *AB*.
110. Докажите, что геометрическое место точек, у которых разность квадратов расстояний от двух данных точек *A* и *B* постоянна, есть прямая, перпендикулярная *AB*.
111. Докажите, что геометрическое место точек, равноудалённых от двух пересекающихся прямых, состоит из биссектрис углов, которые получаются в пересечении этих прямых.

§ 13 п. 5
112. Построить точку, которая была бы одинаково удалена от точек *A* и *B* и находилась бы на данном расстоянии от точки *C*.
113. Дан треугольник *ABC*. Построить все точки, равноудалённые от прямых *AB, BC, AC*.
114. Построить точку, равноудалённую от двух данных прямых и находящуюся на данном расстоянии от данной точки.
115. Построить окружность данного радиуса, касающуюся сторон данного угла.
116. Найти окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей. Какое наибольшее число решений может иметь задача?
117. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки *A* на прямые, проходящие, через заданную точку *B*.
118. Найти геометрическое место вершин треугольников с данным основанием *AB* и заданным углом при вершине *B*.
119. Построить треугольник *ABC* по стороне *AB*, углу *C* и высоте к основанию *AB*.
120. Найти геометрическое место середин хорд, проходящих через данную точку.

121. *ABC* – треугольник. Построить окружности, касающиеся прямых *AB, AC* и *BC*. Сколько существует таких окружностей?
122. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных пересекающихся прямых постоянно.
123. Построить треугольник с данным периметром, подобный данному треугольнику.
124. Даны отрезки $a = \frac{x+y}{2}, b = \sqrt{xy}$. Построить отрезки *x* и *y*, если *a* > *b*.
125. Вписать в треугольник *ABC* квадрат так, чтобы одна сторона квадрата была на стороне *AB* треугольника, а другие вершины квадрата были на сторонах *AC* и *BC*.
126. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных пересекающихся прямых.

Решения упражнений

1) Допустим точка *A* лежит между *B* и *C.* Тогда для длин отрезков *AB, AB* и *BC* по аксиоме IV должно выполняться равенство: *BC* = *AB* + *AC.* Но 3,8 ≠ 4,6 + 8,4. Значит точка *A* не лежит между *B* и *C.* Аналогично проверяется, что точка *C* не лежит между *A* и *B.* Следовательно точка B лежит между точками *A* и *C,* потому что только в этом случае для длин отрезков выполняется равенство, требуемое аксиомой IV: *AC* = *AB* + *BC.*

2) Не могут. Если три точки лежат на одной прямой, то одна из них лежит между двумя другими (акс. III), тогда по аксиоме IV сумма длин каких-нибудь двух отрезков должна быть равна третьему, что не выполняется.

3) Рассмотрим три случая расположения точек *A, B* и *C.*
Если точка *A* лежит между точками *B* и *C*, то *BC* = *AC* + *AB* = 2,4 + 3,8 = 6,2.
Если точка *C* лежит между *A* и *B,* то *AB* = *AC* + *BC* ⇒ *BC* = *AB* – *AC* = 3,8 – 2,4 = 1,4.
Если точка *B* лежит между *A* и *C,* то *AC* = *AB* + *BC* ⇒ *BC* = *AC* – *AB* = 2,4 – 3,8 = –1,4.
Но по аксиоме аксиоме IV длина должна быть больше нуля, следовательно точка *B* не может лежать между *A* и *C.* Ответы к задаче: 6,2 или 1,4.

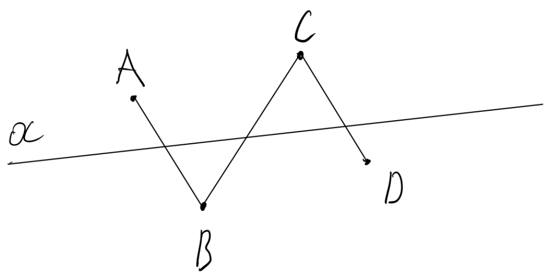
4) Точка *A* не может лежать между точками *B* и *C,* потому что *A* начальная точка полупрямой *AB* (опр. 5 и 2). Если бы точка *C* лежала между *A* и *B* (¬), то по аксиоме IV *AC* + *BC* = *AB,* а значит *AB* > *AC* (по свойству положительных чисел), но по условию *AC* > *AB* ⊗. Значит точка *C* не лежит между *A* и *B.* Но одна из трёх точек на прямой должна лежать между двумя другими (акс. III), значит точка *B* лежит между *A* и *C.*

5) *AC* < *AB*, значит по теореме 4 точка *C* лежит между *A* и *B.* Тогда по аксиоме IV *AB* = *AC* + *BC*, следовательно *BC* = *AB* – *AC* = 5 – 3 = 2.

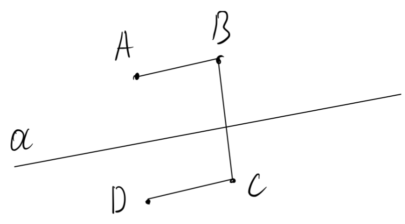
6) Через точки *B* и *C* проходит одна прямая *BC* (акс. II), по первому условию точка *A* лежит на прямой *BC,* а по второму точка *D* лежит на прямой *BC,* следовательно все четыре точки лежат на одной прямой.

7) Прямые *b* и *c* могут пересекаться только в одной точке (т. 2). По первому условию, прямая *a* проходит через точку пересечения прямых *b* и *c,* а по второму прямая *d* проходит через точку пересечения прямых *b* и *c,* следовательно все четыре прямые пересекаются в одной точке.

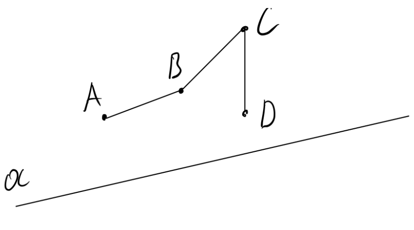
8) Раз прямая *AB* пересекает отрезок *CD,* который по определению является частью прямой *CD,* то прямые *AB* и *CD* пересекаются в некоторой точке *E.* Точка *E* – единственная общая точка прямых *AB* и *CD* (т. 2). По первому условию точка *E* лежит на отрезке *CD,* а по второму на отрезке *AB.* Следовательно *E* – общая точка отрезков *AB* и *CD,* а значит они пересекаются.



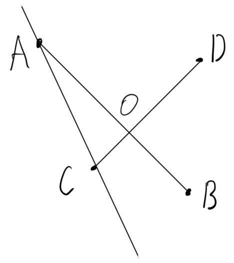
9) Отрезок *AB* пересекает прямую *a*, следовательно точки *A* и *B* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *a*. Отрезок *BC* пересекает прямую *a*, значит точка *C* не лежит в полуплоскости точки *B*, а лежит в полуплоскости точки *A*. Отрезок *CD* пересекает прямую *a*, значит точка *D* не лежит в полуплоскости точек *C* и *A*, а лежит в другой полуплоскости. Раз точки *A* и *D* лежат в разных полуплоскостях, отрезок *AD* пересекает прямую *a*.



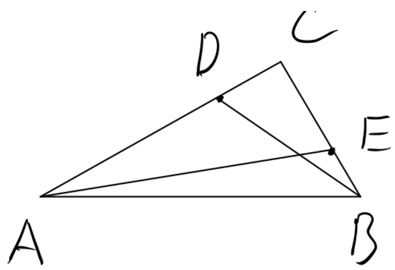
10) Отрезок *AB* не пересекает прямую *a*, значит точка *B* лежит в полуплоскости точки *A*. Отрезок *BC* пересекает прямую *a*, значит точка *C* не лежит в полуплоскости точек *B* и *A*, а лежит в другой полуплоскости. Отрезок *CD* не пересекает прямую *a*, значит точка *D* лежит в одной полуплоскости с точкой *C*, и в разных полуплоскостях с точкой *A*. Следовательно отрезок *AD* пересекает прямую *a*.



11) Отрезок *AB* не пересекает прямую *a*, значит точка *B* лежит в полуплоскости точки *A*. Отрезок *BC* не пересекает прямую *a*, значит точка *C* лежит в одной полуплоскости с точками *B* и *A*. Отрезок *CD* тоже не пересекает *a*, значит точка *D* лежит в одной полуплоскости с точкой *C*, а также *B* и *A*. Следовательно отрезок *AD* не пересекается с *a*.



12) Прямая *AC* не совпадает с прямой *AB*, так как иначе у прямых *AB* и *CD* были бы две общие точки *C* и *O*, что невозможно по аксиоме II. Тогда по теореме 10 отрезок *AB* лежит в одной полуплоскости относительно прямой *AC*, а именно в полуплоскости точки *B*. Следовательно в этой полуплоскости лежит и его точка *O*. Аналогично отрезок *CD* лежит в полуплоскости, которой принадлежит его конец *D*, относительно прямой *AC*, а значит в этой же полуплоскости лежит его точка *O*. Получаем, что точки *B* и *D* лежат в одной полуплоскости с точкой *O* относительно прямой *AC*. Следовательно по теореме 8 отрезок *BD* не пересекает прямую *AC*.



13) Отрезок *BC* лежит в полуплоскости точки *C* относительно прямой *BD* (т. 9). Значит в этой же полуплоскости лежит его точка *E*. Точки *A* и *C* лежат в разных полуплоскостях, относительно прямой *BD*, так как отрезок *AC* пересекается с этой прямой в точке *D* (т. 7). Следовательно точки *A* и *E* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *BD* и отрезок *AE* пересекает эту прямую.

Повторим эти же рассуждения так, чтобы в конце получить пересечение отрезка *BD* и прямой *AE*. Отрезок *AC* лежит в полуплоскости точки *C* относительно прямой *AE*. Значит в этой же полуплоскости лежит его точка *D*. Точки *B* и *C* лежат в разных полуплоскостях, относительно прямой *AE*, так как отрезок *BC* пересекается с этой прямой в точке *E*. Следовательно точки *B* и *D* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *AE* и отрезок *BD* пересекает эту прямую.

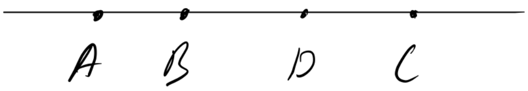
Прямые *AE* и *BD* пересекаются в одной точке (т. 2). По доказанному на прямой *AE* это точка принадлежит отрезку *AE*, а на прямой *BD* отрезку *BD*. Следовательно отрезки *AE* и *BD* пересекаются.

14) Дополнительные *AB* и *AC; BA* и *BD*, совпадающие *AB* и *AD*; *BA* и *BC*; *DA*, *DB* и *DC*; *CA, CB* и *CD*.

15) Точка *C* делит прямую на две полупрямые (т. 11). Точка *C* лежит между точками *B* и *D*, следовательно точки *B* и *D* лежат на разных полупрямых. Точка *B* лежит между точками *A* и *C*, следовательно точки *A* и *B* лежат по одну сторону от точки *C* (опр. 2), следовательно точка *A* лежит на полупрямой *CB* (опр. 5). Точки *A* и *D* принадлежат разным полупрямым, следовательно они разделяются точкой *C* (т. 11).

16) Нам даны три условия:

1. Точка *B* лежит между *A* и *C (A - B - C)*,



2. Точка D лежит между A и C (A - D - C),
3. Точка B лежит между A и D (A - B - D).

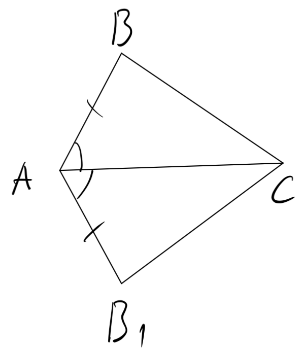
Рассмотрим все возможные расположения точек B, C и D.
Допустим, что точка C лежит между B и D. Тогда существуют полупрямые CB и CD, и точка A лежит на полупрямой CB (условие 1), следовательно точка A не лежит на полупрямой CD, то есть точки A и D разделяются точкой C, что противоречит условию 2. Значит точка C не может лежать между B и D .

Допустим, что точка B лежит между D и C. Тогда существуют полупрямые BD и BC. Точка A не лежит на BD (условие 3), следовательно точка A лежит на полупрямой BC, но это противоречит условию 1. Значит точка B не лежит между D и C.

Так как одна из трёх точек лежит между двумя другими, точка D лежит между точками B и C.

17) Обозначим a, b, d, c_1, c_2 координаты точек A, B, D, C_1, C_2 соответственно. Воспользуемся результатом теоремы 18. $c_1 = \frac{a+b}{2}$, $c_2 = \frac{b+d}{2}$. Тогда $|c_2 - c_1| =$ $|\frac{b+d}{2} - \frac{a+b}{2}| = \frac{|b+d-a-b|}{2} = \frac{|d-a|}{2}$. Отсюда имеем $|d - a| = 2|c_2 - c_1|$, что в соответствии с теоремой 17 означает $AD = 2C_1C_2$.

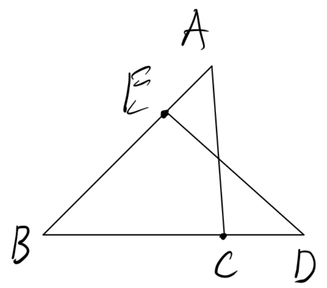
18) Например, $\angle(ac) = 35°$, $\angle(bc) = 40°$, $\angle(ab) = 90°$. Луч c не может проходить между сторонами угла (ab), потому что в этом случае должно выполняться равенство $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$, а оно при таких градусных мерах не выполняется.



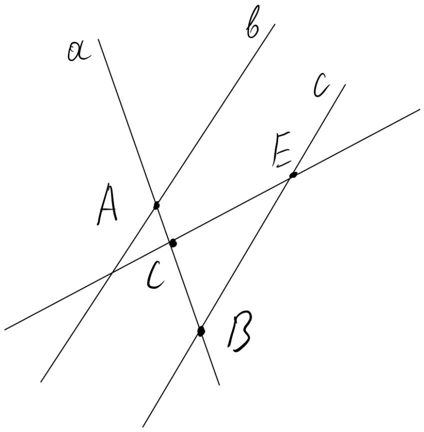
19) Нет, так как углы, лежащие против приравненных сторон не приравнены друг другу. Например, по условию $FP = MN$, но не сказано, что угол L, лежащий против FP, равен углу K, лежащему против MN.

20) По условию $AB = AB_1$ и $\angle BAC = \angle B_1AC$, и сторона AC обоих треугольников общая, то есть $AC = AC$. Значит выполняются все три условия аксиомы IX, поэтому $\Delta ABC = \Delta AB_1C$. По определению равенства треугольников это означает, что $BC = B_1C$.

21) Точка *E* лежит между *A* и *B*, следовательно *AB* = *BE* + *EA* ⇒ *BE* = *AB* − *EA* = 5 – 2 = 3.

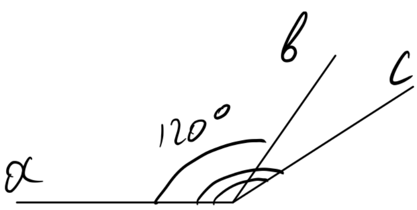


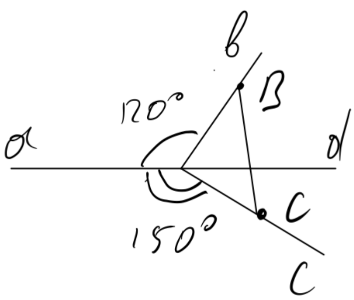
Точка *C* лежит между *B* и *D*, следовательно *DB* = *CD* + *BC* = 2 + 3 = 5.
Точки *E* и *A* лежат по одну сторону от точки *B*, следовательно лучи *BE* и *BA* совпадают. Аналогично, совпадают лучи *BC* и *BD*, следовательно *EBD* и *ABC* это один и то же угол. Тогда в треугольниках *DBE* и *ABC* *DB* = *AB* = 5, *BE* = *BC* = 3, угол *B* общий, следовательно Δ*DBE* = Δ*ABC* по аксиоме IX. По определению в равных треугольниках стороны, лежащие против приравненных углов, равны, значит *ED* = *AC* = 7.



22) Проведём через точку *E* прямую *c*, параллельную прямой *b*. Эта прямая не может быть параллельна *a*, потому что иначе получится, что через точку *A* проходят две прямые (*a* и *b*), параллельные прямой *c*, что противоречит аксиоме X. Следовательно прямая *c* пересекает *a* в некоторой точке *B*. Отметим на прямой *a* точку *C*, отличную от точек *A* и *B*, и построим прямую *EC*. Эта прямая не может быть параллельна прямой *b*, так как в этом случае через точку *E* проходили бы две прямые (*EB* и *EC*), параллельные *b*. Следовательно, прямая *EC* пересекает прямую *b* в некоторой точке, отличной от точки *A* (потому что у прямых *EC* и *a* не может быть двух общих точек *C* и *A*).

23) Пусть лучи *b* и *c* лежат в одной полуплоскости. Угол *(ac)* больше угла *(ab)*, следовательно луч *b* проходит между сторонами угла *(ac)*. Тогда ∠*(bc)* = ∠*(ac)* –





∠*(ab)* = 150° – 120° = 30°.

Пусть теперь лучи *b* и *c* проведены в разные полуплоскости. Обозначим *d* полупрямую дополнительную полупрямой *a*. Отметим точку *B* на луче *b* и точку *C* на луче *c*. Так как лучи *b* и *c* отложены в разные полуплоскости, точки *B* и *C* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч *a*, следовательно отрезок *BC* пересекается с прямой, содержащей луч *a*. Допустим, что точка пересечения лежит на луче *a*. Тогда луч *a* проходит между сторонами угла *(bc)*, следовательно $\angle(bc) = \angle(ab) + \angle(ac) = 150° + 120° = 270°$. Но это невозможно так как неразвёрнутый угол всегда меньше 180°. Следовательно отрезок *BC* пересекает полупрямую *d*, которая, в этом случае, проходит между сторонами угла *(bc)*. Тогда $\angle(bc) = \angle(bd) + \angle(cd)$. Угол *(bd)* смежный с углом *(ab)*, следовательно $\angle(bd) = 180° – 120° = 60°$. Угол *(cd)* смежный с углом *(ac)*, следовательно $\angle(cd) = 180° – 150° = 30°$. Тогда $\angle(bc) = 60° + 30° = 90°$.

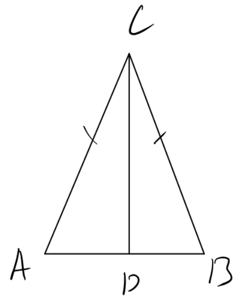
24) Обозначим меньший из углов α, тогда второй угол равен 2α. Получаем, что $\alpha + 2\alpha = 180°$, следовательно $\alpha = 60°$, $2\alpha = 120°$.

25) Обозначим меньший из углов α, тогда второй угол равен $\alpha + 30°$. Получаем, что $\alpha + \alpha + 30° = 180°$, следовательно $\alpha = 75°$, $\alpha + 30° = 105°$.

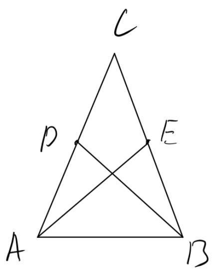
26) Точка *O* принадлежит отрезкам *AB* и *CD*, следовательно точки *A* и *B*, а также *C* и *D* лежат по разные стороны от точки *O*. Тогда полупрямые *OA* и *OB*, так же, как и *OC* и *OD* являются дополнительными. Следовательно, углы *AOC* и *BOD* вертикальные.

27) Углы, получающиеся при пересечении прямых, либо смежные с углом 60°, либо вертикальные. Следовательно, они равны 60°, 120°, 120°.

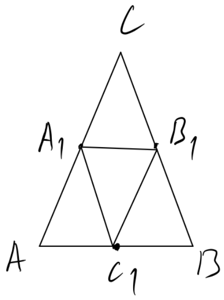
28) Пусть *ABC* – данный равнобедренный треугольник с основанием *AB*. Пусть *CD* – биссектриса. Рассмотрим треугольники *CAD* и *CBD*, у них *AC* = *BC* так как треугольник *ABC* равнобедренный, $\angle ACD = \angle BCD$ так как *CD* – биссектриса, сторона *CD* – общая, следовательно $\Delta CAD = \Delta CBD$ по первому признаку. Из равенства треугольников следует, что $\angle ADC = \angle BDC$ и *AD* = *BD*.



Точка *D* принадлежит отрезку *AB* по определению биссектрисы треугольника, тогда из равенства *AD* = *BD* следует, что *CD* – медиана. Точка *D* принадлежит отрезку *AB*, следовательно точки *A* и *B* разделяются точкой *D*, а значит полупрямые *DA* и *DB* являются дополнительными. Тогда углы *ADC* и *BDC* – смежные, и в сумме равны 180°. Так как эти углы равны, то равны их градусные меры, и градусная мера каждого из них равна 180°/2 = 90°, то есть прямые *AB* и *CD* перпендикулярны, следовательно *CD* – перпендикуляр к прямой *AB*, а значит и высота треугольника *ABC*.



29) Пусть ABC – данный равнобедренный треугольник, AE и BD – медианы (биссектрисы), проведённые к боковым сторонам. Треугольник ABD равен треугольнику BAE в случае медиан по первому признаку равенства, а в случае биссектрис по второму, следовательно $AE = BD$.

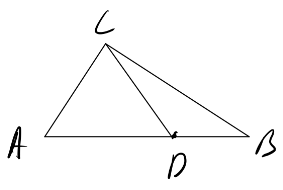


30) Пусть ABC – данный равнобедренный треугольник с основанием AB, точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон AC, BC, AB соответственно. Рассмотрим треугольники AA_1C_1 и BB_1C_1. В них $AC_1 = BC_1$ так как т. C_1 – середина AB, $AA_1 = BB_1$ – как половины равных сторон AC и BC, $\angle A = \angle B$ – как углы при основании равнобедренного треугольника ABC. Следовательно $\Delta AA_1C_1 = \Delta BB_1C_1$ по первому признаку равенства $\Rightarrow A_1C_1 = B_1C_1 \Rightarrow$ треугольник $A_1C_1B_1$ равнобедренный.

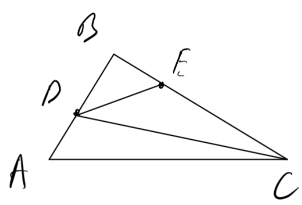
31) Допустим, что два внешних угла треугольника не тупые, а значит меньше либо равны 90°. Тогда смежные с ними внутренние углы треугольника больше либо равны 90° каждый, то есть в сумме больше либо равны 180°, что противоречит теореме 38. Следовательно, в любом треугольнике два внешних угла тупые.

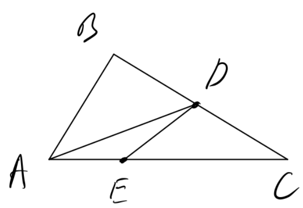
32) Пусть прямые a и b перпендикулярны прямой c. Пусть A – точка пересечения прямых a и c, B – точка пересечения прямых b и c. Допустим, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке C, тогда по определению перпендикулярных прямых углы CAB и CBA в треугольнике ABC равны 90° каждый, то есть в сумме равны 180°, что противоречит теореме 38. Следовательно, прямые a и b не пересекаются.

33) Предположим, что CD больше и AC, и BC. Тогда из того, что $CD > AC$ следует, что $\angle A > \angle CDA$, а из того, что $CD > BC$ следует, что $\angle B > \angle CDB$. Углы CDA и CDB смежные, и в сумме равны 180°. Если $\angle A > \angle CDA$ и $\angle B > \angle CDB$, то сумма углов A и B больше 180°, что противоречит теореме 38.



34) Пусть ABC – данный треугольник с наибольшей стороной AC. Докажем, что отрезок DE, с концами на сторонах треугольника, меньше AC. Будем рассматривать два случая: когда ни один из концов отрезка DE не лежит на стороне AC, и когда один из концов, например, E, лежит на стороне AC.





Пусть точка D принадлежит стороне AB, а точка E стороне BC. Предположим, что $DE > AC$. В треугольнике CDE сторона DE наибольшая. Действительно, по доказанному в №33 CD меньше либо AC, либо BC, но так как $BC < AC$, то $CD < AC$; точка E лежит между точками B и C, следовательно $CE < BC < AC$. Тогда из того, что $DE > AC$ следует, что DE – наибольшая сторона треугольника CDE. Тогда угол DCE в треугольнике CDE наибольший (т. 40). Значит $\angle DCE > \angle DEC$, а $\angle DEC$ в свою очередь больше угла B так как является внешним углом треугольника DBE (т. 39). Итак, $\angle DCE > \angle B$.

Полупрямая CD пересекает отрезок AB в т. D и, следовательно, проходит между сторонами угла ACB. Значит $\angle DCE < \angle ACB$, но в тоже время $\angle DCE > \angle B$, следовательно $\angle ACB > \angle B$, что невозможно так как угол B наибольший в треугольнике ABC, поскольку лежит против большей стороны AC. Мы пришли к противоречию, следовательно $DE < AC$.

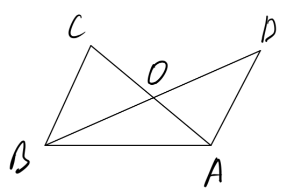
Пусть теперь т. E лежит на стороне AC, а т. D на стороне BC. Предположим, что $DE > AC$. Тогда в треугольнике ADE стороне DE наибольшая. В самом деле т. E лежит между точками A и C, следовательно $AE < AC$, а $DE > AC$, значит $DE > AE$. Сторона AD по доказанному в №33 меньше либо AC, либо AB, но $AB < AC$, следовательно $AD < AC$, а тогда $DE > AD$. Итак, DE – наибольшая сторона в треугольнике ADE и, значит лежащий напротив неё угол DAE тоже наибольший. Тогда $\angle DAE > \angle AED$. Так как AED – внешний угол треугольника DEC, то $\angle AED > \angle C$ (т. 39). Получаем, что $\angle DAE > \angle C$.

В тоже время DE – наибольшая сторона в треугольнике DEC, так как $EC < AC$ и $DC < BC < AC$, а $DE > AC$ по предположению. Следовательно угол C наибольший угол треугольника DEC, в том числе $\angle C > \angle DEC$. Угол DEC – внешний к треугольнику ADE, следовательно $\angle DEC > \angle DAE$. Получаем, что $\angle C > \angle DAE$, что противоречит доказанному выше неравенству $\angle DAE > \angle C$. Следовательно в обоих случаях должно быть $DE < AC$.

35) Не может, так как $18 > 10 + 7$, что противоречит теореме 41.

36) Если предположить, что точки A, B, C не лежат на одной прямой, то в треугольнике ABC по теореме 41 $AB < AC + BC$, что противоречит условию $AB = AC + BC$, следовательно точки A, B, C лежат на одной прямой.

37) Отложим на продолжении отрезка BO отрезок OD, равный BO. Треугольники

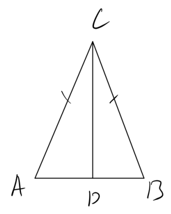


AOD и COB равны. У них углы при вершине O равны как вертикальные, $AO = OC$ так как т. O – середина AC, $BO = OD$ по построению. Из равенства треугольников следует, что $DA = BC$. Тогда $BD < BA + AD$ (т. 41), но так как $BD = BO + OD$, а $AD =$

BC, получаем, что $2BO < BA + BC \Rightarrow BO < (BA + BC)/2$.

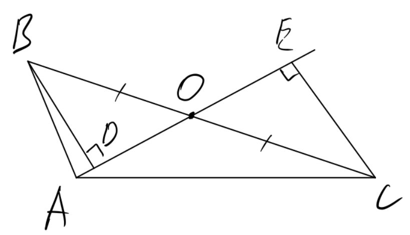
38) Пусть BA – перпендикуляр, проведённый из т. B к прямой a, BC и BD равные наклонные к прямой a. Тогда прямоугольные треугольники ABC и ABD равны по катету и гипотенузе, следовательно $CA = AD$.

Обратно, если проекции CA и AD равны, то прямоугольные треугольники ABC и ABD равны по первому признаку равенства, следовательно $BC = BD$.

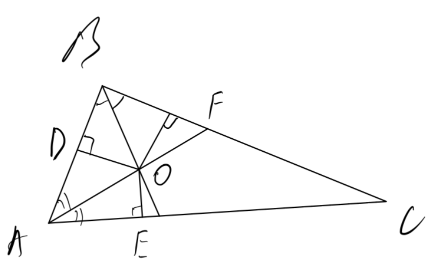


39) Пусть ABC равнобедренный треугольник с основанием AB, CD – высота, проведённая к основанию. Тогда прямоугольные треугольники ACD и BCD равны по катету и гипотенузе (CD – общая, $AC = BC$ как боковые стороны равнобедренного треугольника), следовательно $AD = DC$, т.е. CD является медианой, а тогда по теореме 35 она является и биссектрисой.

40) Надо провести её через середину O стороны BC. Если треугольник ABC равнобедренный с основанием BC, то его медиана AO является высотой, следовательно $BO \perp AO$ и $CO \perp AO$, то есть BO и CO, и есть равные перпендикуляры, опущенные на прямую AO.



Рассмотрим случай, когда $AB \neq AC$. Проведём перпендикуляры BD и CE к прямой AO. Если точки E и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC, то углы COE и BOD смежные. Так как AO в этом случае не перпендикулярно BC, то эти углы не равны, следовательно один из них острый, а другой тупой. Пусть, например, BOD тупой угол, тогда в треугольнике BOD сумма прямого угла D и тупого угла O больше 180°, что противоречит теореме 38. Значит точки E и D лежат в разных полуплоскостях, относительно прямой BC. Тогда $\angle BOD > \angle EOC$ – как вертикальные углы и $\Delta BOD = \Delta EOC$ по теореме 43 случай 3. Из равенства треугольников следует равенство перпендикуляров $BD = CE$.

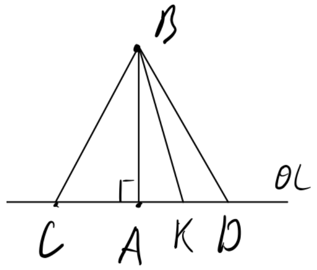


41) Пусть биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке O. Проведём перпендикуляры OE, OF, OD к сторонам AC, BC, AB треугольника. $\Delta BOD = \Delta BOF$ по теореме 43 случай 2 (BO – общая, $\angle DBO = \angle FBO$), следовательно $DO = OF$. $\Delta AOD = \Delta AOE$ по теореме 43 случай 2 (AO – общая, $\angle OAE = \angle OAD$), следовательно $DO = OE$. Таким образом $OF = DO = OE$ – все три расстояния равны.

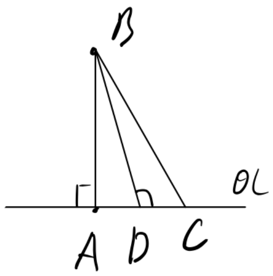
42) Пусть *O* – точка пересечения биссектрис *AO* и *BO* треугольника *ABC*, *OE* и *OF* – перпендикуляры, опущенные на стороны *AC* и *BC*. Проведём луч *CO*. В треугольниках *COF* и *COE* сторона *CO* общая, *OF* = *OE* (см. задачу 41), следовательно $\Delta COF = \Delta COE$ по теореме 43 случай 2, значит $\angle FCO = \angle ECO$, то есть луч *CO* является биссектрисой угла *C*.

43) Пусть *BA* – перпендикуляр к прямой *a*. Отложим на полупрямой, дополнительной полупрямой *AC* отрезок *AD*, равный отрезку *AC*. Так как *AD* и *AC* равные проекции наклонных *BC* и *BD*, эти наклонные тоже равны (см. задачу 38).

44) Пусть *BA* – перпендикуляр к прямой *a, BC* и *BD* – две равные наклонные к прямой *a*. Предположим, что можно провести ещё одну наклонную *BK*, равную *BC* и *BD*. Тогда точка *K* будет принадлежать либо полупрямой *AC*, либо полупрямой *AD*. Пусть, например, она принадлежит *AD*. Тогда либо точка *D* лежит между *A* и *K*, либо *K* лежит между *A* и *D*. В первом случае треугольник *BDK* – равнобедренный. Угол *BDA* в прямоугольном треугольнике *BDA* острый, значит смежный с ним угол *BDK* тупой. Получается, что в равнобедренном треугольнике *BDK* углы при основании *BDK* и *BKD* оба тупые, что противоречит теореме 38. Если т. *K* лежит между *A* и *D* рассуждение аналогично. Следовательно наклонной *BK* не существует.



45) В прямоугольном треугольнике *BAD* угол *A* прямой, следовательно угол *D* острый. Угол *BDC* смежный с острым углом *BDA*, следовательно он тупой.



46) Пусть *BA* перпендикуляр, а *BD* и *BC* наклонные, проведённые к прямой a, причём *AD* < *AC*. Докажем, что *BC* > *BD*.

Если точки *D* и *C* лежат по одну сторону от т. *A*, то точка *D* лежит между *A* и *C*. Тогда в треугольнике *BDC* угол *BDC* тупой (см. задачу 45), а угол *BCD* – острый, следовательно *BC* > *BD*.

Если точки *D* и *C* лежат по разные стороны от т. *A*, отложим на полупрямой AD отрезок $AC_1 = AC$. Точка *D* будет лежать между точками *A* и C_1. Наклонная AC_1 равна *AC* (см. задачу 38). Из рассмотрения треугольника BDC_1 аналогично предыдущему получаем, что $BC_1 > BD$, следовательно $BC > BD$.

Обратно, пусть наклонная BC больше BD, докажем, что $AC > AD$. Если $AC = AD$, то $BC = BD$ (см. задачу 38), следовательно $AC \neq AD$. Если $AC < AD$, то по доказанному $BC < BD$, что противоречит условию. Следовательно $AC > AD$.

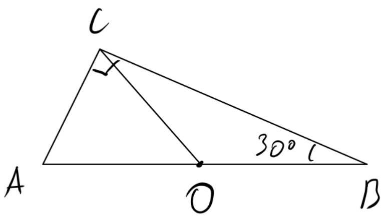
47) Сумма углов треугольника равна 180°, и углы при основании равны друг другу, следовательно каждый из них равен (180° – 57°)/2 = 61,5° > 57°. Значит боковые стороны треугольника больше, чем основание так как боковые стороны лежат против больших углов (т. 40).

48) 180°/6 = 30°. Значит углы равны 30°, 60°, 90°.

49) 45°, 45°, 90°.

50) Надо провести прямую, параллельную прямой BC.

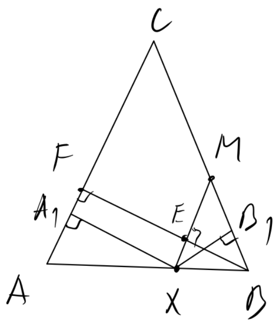
51) Пусть в треугольнике ABC угол C равен 90°, угол B равен 30°, докажем, что катет AC равен половине гипотенузы AB.



$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle A = 60°$ и $AB > AC$. Отложим на полупрямой AB отрезок $AO = AC$. Треугольник AOC равнобедренный $\Rightarrow \angle ACO = \angle AOC = 60° \Rightarrow$ треугольник AOC равносторонний $\Rightarrow CO = AC$.

$AO = AC < AB \Rightarrow$ точка O лежит между точками A и $B \Rightarrow$ луч CO пересекает отрезок AB в точке $O \Rightarrow$ луч CO проходит между сторонами угла $ACB \Rightarrow \angle ACB = \angle ACO + \angle OCB \Rightarrow 90° = 60° + \angle OCB \Rightarrow \angle OCB = 30° \Rightarrow$ треугольник OCB равнобедренный $\Rightarrow OC = OB \Rightarrow OB = AC = AO \Rightarrow$ т. O является серединой гипотенузы $AB \Rightarrow AB = AO + OB = 2AC \Rightarrow$ катет AC равен половине гипотенузы AB.

52) Пусть XA_1 и XB_1 перпендикуляры, опущенные из т. X на прямые AC и BC.



Проведём через точку X прямую, параллельную AC. Эта прямая пересечёт прямую BC в точке M. Поскольку прямая XM не пересекает сторону AC, то по теореме 7 она пересекает сторону BC треугольника ABC. Значит точка M принадлежит отрезку BC. Следовательно точки M и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB (т. 10). Тогда углы CAX и MXA – внутренние односторонние при параллельных прямых AC и XM и их сумма равна 180° $\Rightarrow \angle MXB = \angle CAB$.

$\angle CBA = \angle CAB = \angle MXB \Rightarrow$ треугольник MXB равнобедренный.

Проведём высоту BE треугольника MXB. Прямая BE пересекает прямую AC в некоторой точке F, причём $BE \perp AC$.

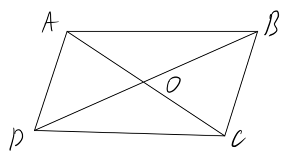
$\Delta XB_1B = \Delta BEX$ по гипотенузе и острому углу $\Rightarrow BE = XB_1$. $XA_1 = EF$ по теореме 49, следовательно $XA_1 + XB_1 = EF + EB$.

Прямая AC лежит в одной полуплоскости относительно параллельной ей прямой XM, а точка B лежит в другой полуплоскости (так как отрезок AB пересекается с прямой XM), следовательно точка F прямой AC и точка B лежат в разных полуплоскостях. Значит отрезок BF пересекает прямую XM в точке E и $EF + EB = BF$.

Таким образом сумма расстояний от произвольной точки X основания AB до сторон AC и BC треугольника ABC равна высоте BF треугольника ABC, а значит не зависит от расположения точки X.

53) Нет, так как тогда сумма углов четырёхугольника будет больше 360°.

54) Пусть $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, и O – некоторая точка. Сумма расстояний от точки O до точек A и C будет наименьшей, если точка O лежит на диагонали AC (т. 41 и 42), а сумма расстояний до точек B и D будет наименьшей, если O лежит на диагонали BD. Следовательно сумма все четырёх расстояний будет наименьшей, если O – точка пересечения диагоналей AC и BD.



55) Пусть $ABCD$ – данный выпуклый четырёхугольник, $BO = OD$, $CO = OA$. Тогда $\Delta BOA = \Delta DOC$ по первому признаку, следовательно $BA = CD$;
$\Delta BOC = \Delta DOA$ по первому признаку, следовательно $AD = BC$.
Таким образом в четырёхугольнике $ABCD$ противолежащие стороны равны, следовательно $ABCD$ – параллелограмм.

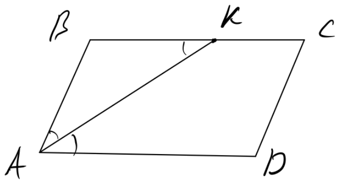
56) Пусть $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$.

$\angle BAD + \angle BCD + \angle ABC + \angle ADC = 360°$

$2\angle BAD + 2\angle ABC = 360°$

$\angle BAD + \angle ABC = 180°$

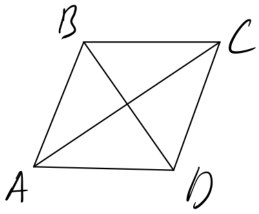
Так как четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB, следовательно углы BAD и ABC внутренние односторонние при прямых BC и AD и секущей AB. Так как сумма этих углов равна 180°, то $BC \parallel AD$.
Аналогично получаем, что $\angle BCD + \angle ABC = 180°$, следовательно $AB \parallel CD$.
У четырёхугольника $ABCD$ противолежащие стороны параллельны, следовательно этот четырёхугольник – параллелограмм.



57) Пусть AK – биссектриса, $BA = 5$ см, $BC = 6$ см. Луч AK по определению биссектрисы проходит между сторонами угла BAD, следовательно точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AK. Тогда углы BKA и KAD внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK, следовательно $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK \Rightarrow$ треугольник BAK – равнобедренный $\Rightarrow BK = 5$ см $\Rightarrow KC = BC - BK = 1$ см.

58) Пусть $ABCD$ – параллелограмм и $AC = BD$. Тогда $\Delta DAB = \Delta CAB$ по третьему признаку $\Rightarrow \angle CBA = \angle DAB$, но так как $\angle CBA + \angle DAB = 180°$ (как внутренние односторонние при параллельных прямых AC и DB), то $\angle CBA = \angle DAB = 90°$. Аналогично доказывается, что $\angle BCD = \angle ADC = 90° \Rightarrow ABCD$ – прямоугольник.

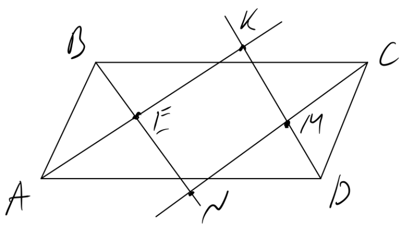
59) Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°. Если все углы четырёхугольника равны, то каждый из них равен 360°/4 = 90°, следовательно четырёхугольник является прямоугольником.



60) Пусть $ABCD$ – ромб и $BD = AB = AD$. Тогда треугольник BAD – равносторонний $\Rightarrow \angle BAD = 60° = \angle BCD$ и $\angle ABC = 180° - \angle BAD = 120° = \angle ADC$. Итак, углы ромба 60°, 120°, 60°, 120°.

61) Пусть $ABCD$ – параллелограмм, диагонали BD и AC пересекаются под прямым углом в точке O. Тогда $\Delta ABO = \Delta ADO$ по первому признаку ($BO = OD$ по свойству параллелограмма, AO – общая, $\angle AOB = \angle AOD \Rightarrow AB = AD$.

Аналогично $\Delta AOD = \Delta COB$ по первому признаку $\Rightarrow AD = BC$; $\Delta BCO = \Delta DCO \Rightarrow BC = CD$. Получаем, что $AB = AD = BC = CD \Rightarrow ABCD$ – ромб.



62) Утверждение неверно, точки пересечения биссектрис являются вершинами прямоугольника, а не квадрата.

Пусть $ABCD$ – параллелограмм, E, K, M, N – точки пересечения биссектрис как показано на рисунке. $\angle CBA + \angle BAD = 180°$ – внутренние односторонние.

$\angle EBA = \angle CBA/2$; $\angle EAB = \angle BAD/2 \Rightarrow$

$\angle EBA + \angle EAB = (\angle CBA + \angle BAD)/2 = 90° \Rightarrow$ в треугольнике ABE $\angle BEA = 180° - (\angle EBA + \angle EAB) = 90°$. Аналогично $\angle CMD = 90°$ (из ΔCMD).

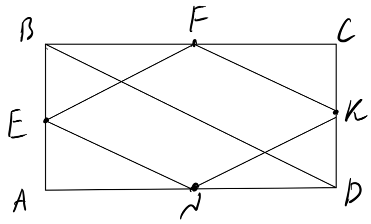
С другой стороны $\angle KAD = \angle BAD/2$ и $\angle KDA = \angle CDA/2$. $\angle BAD + \angle CDA = 180° \Rightarrow$

$\angle KAD + \angle KDA = 90° \Rightarrow$ в треугольнике AKD $\angle AKD = 180° - (\angle KAD + \angle KDA) = 90°$.

Аналогично $\angle BNC = 90°$ (из ΔBNC).

Получаем, что биссектрисы углов параллелограмма пересекаются друг с другом под прямыми углами, следовательно $KENM$ – прямоугольник.

63) а) Пусть $ABCD$ – прямоугольник, точки E, F, K, N – середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Тогда FK – средняя линия треугольника BDC, EN – средняя линия треугольника ABD.



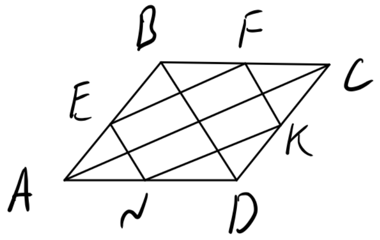
$FK \parallel BD$ и $EN \parallel BD \Rightarrow FK \parallel EN$;

$FK = BD/2$ и $EN = BD/2 \Rightarrow FK = EN$

$\Rightarrow EFKN$ параллелограмм.

$\Delta EAN = \Delta KDN = \Delta KCF = \Delta EBF$ по первому признаку $\Rightarrow EN = NK = KF = FE \Rightarrow EFKN$ – ромб.

б) EN – средняя линия в $\Delta ABD \Rightarrow EN \parallel BD$.



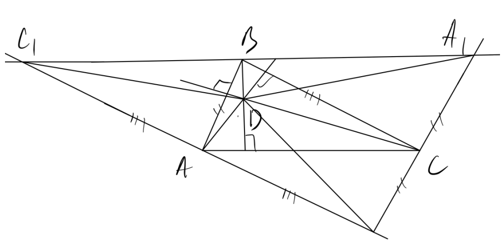
FK – средняя линия в $\Delta CBD \Rightarrow FK \parallel BD$.

EF – средняя линия в $\Delta BAC \Rightarrow EF \parallel AC$.

NK – средняя линия в $\Delta DAC \Rightarrow NK \parallel AC$.

$AC \perp BD$ – как диагонали ромба $\Rightarrow EF \perp EN$, $EN \perp NK$, $NK \perp KF$ и $KF \perp FE \Rightarrow EFKN$ – прямоугольник.

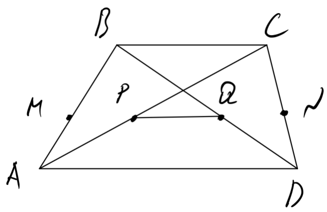
64) Пусть ABC – данный треугольник. Проведём через т. A прямую, параллельную BC, через т. C прямую, параллельную AB, через т. B прямую, параллельную AC. Эти прямые пересекаются в точках A_1, B_1, C_1. Для определённости будем считать, что т. A лежит на прямой B_1C_1. Тогда четырёхугольник ABA_1C – параллелограмм, следовательно $A_1B = AC$. Четырёхугольник $ACBC_1$ тоже параллелограмм, следовательно $C_1B = AC$. Получаем, что $A_1B = C_1B$, то есть т. B – середина отрезка C_1A_1. Аналогично доказывается, что т. A – середина C_1B_1, т. C – середина B_1A_1.



Проведём через т. A прямую, перпендикулярную к прямой, содержащей сторону BC треугольника, а через т. C прямую, перпендикулярную к прямой, содержащей сторону AB. Пусть D – точка пересечения проведённых прямых (перпендикулярные сторонам треугольника прямые пересекаются, т.к. если они бы они были параллельны, то и прямые AB и BC должны были быть параллельны).

Так как $BC \parallel B_1C_1$, то $AD \perp C_1B_1$, т. к. $AB \parallel A_1B_1$, то $CD \perp B_1A_1$. Тогда в треугольнике B_1DA отрезок DC является медианой и высотой, следовательно $\Delta B_1DC = \Delta A_1DC$ по первому признаку $\Rightarrow DA_1 = DB_1$. Также $\Delta C_1DA = \Delta B_1DA$ по первому признаку $\Rightarrow C_1D = DB_1$. Так как $DA_1 = DB_1$, то $C_1D = DA_1$, следовательно треугольник C_1DA_1 равнобедренный с основанием C_1A_1. Тогда DB – медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника и, следовательно она является высотой. $DB \perp C_1A_1$ и $C_1A_1 \parallel AC \Rightarrow DB \perp AC$. Получаем, что прямые DA, DC и DB, перпендикулярные сторонам треугольника ABC, пересекаются в точке D.

65) Пусть $ABCD$ – трапеция, P и Q – середины диагоналей AC и BD, M и N – середины сторон AB и CD.



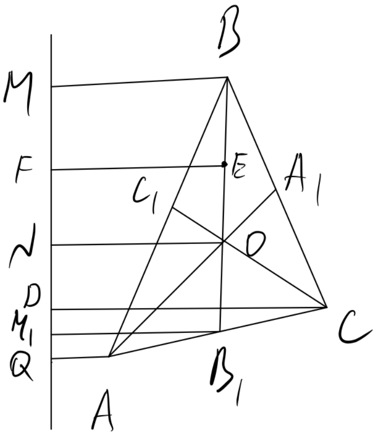
MQ – средняя линия треугольника $ABD \Rightarrow MQ \parallel AD$,

PN – средняя линия треугольника $ACD \Rightarrow PN \parallel AD$,

MN – средняя линия трапеции $\Rightarrow MN \parallel AD$.

Через т. N может проходить только одна прямая, параллельная AD, значит т. P принадлежит MN. Через т. M может проходить только одна прямая, параллельна AD, значит т. Q принадлежит MN. Так как точки P и Q принадлежат прямой, параллельной AD, то $PQ \parallel AD$.

66) Пусть ABC – данный треугольник, O – точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1.



Расстояния до данной прямой BM, ON и AQ. Обозначим $ON = x$. Тогда из трапеции $BMNO$ получаем $\dfrac{BM + x}{2} = EF$, где E – середина BO, EF – средняя линия. Из трапеции $CDQA$ получаем $\dfrac{AQ + CD}{2} = B_1M_1$, где B_1M_1 – средняя линия. Из трапеции B_1M_1FE получаем $\dfrac{EF + B_1M_1}{2} = x$ (O – середина EB_1 так как делит BB_1 в отношении 2:1, N – середина FM_1 так как $ON \perp FD \Rightarrow ON \parallel EF \parallel B_1M_1$).

Подставляя выражение для EF и B_1M_1, получаем

$$x = \frac{\frac{BM + x}{2} + \frac{AQ + CD}{2}}{2};$$
$$x = \frac{BM + x + AQ + CD}{4};$$
$$\frac{3}{4}x = \frac{BM + AQ + CD}{4};$$
$$x = \frac{BM + AQ + CD}{3}.$$

67) Рассмотрим произвольную точку С прямой *AB* и покажем, что соответствующая ей точка C_1 совпадает с *C*. Если точка *C* лежит между точками *A* и *B*, то она переходит в точку C_1, которая по теореме 62 тоже лежит на прямой *AB* между точками *A* и *B*, причем $AC = AC_1$, следовательно точка C_1 совпадает с *C*.

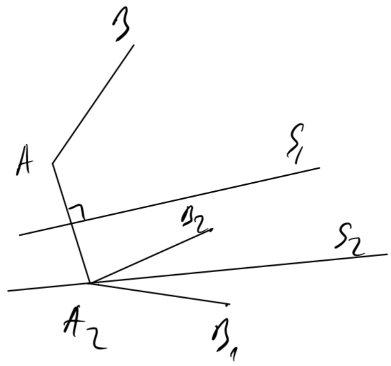
Пусть точка *B* лежит между точками *A* и *C*. Тогда точка C_1 лежит на полупрямой AB и $AC = AC_1 \Rightarrow$ точка C_1 совпадает с *C*. Аналогично в случае, если точка A лежит между B и C.

68) Пусть точки *A, B, C* не лежат на одной прямой и остаются неподвижны. Рассмотрим произвольную точку *X* плоскости. Если *X* лежит на прямой *AB, BC* или *AC*, то она остаётся неподвижна (см. номер 67). Пусть *X* не лежит ни на одной из этих прямых. Тогда возможны два случая.

Первый случай. Пусть точка *X* лежит внутри треугольника *ABC* (в полуплоскости т. *C* относительно прямой *AB*, в полуплоскости т. *A* относительно *BC* и в полуплоскости т. *B* относительно *AC*). Проведём луч *BX*. Углы *ABX* и *ABC* отложены в одну полуплоскость относительно прямой *AB*, следовательно, либо луч *BX* проходит между сторонами угла *ABC*, либо луч *BC* проходит между сторонами угла *ABX*. Однако второй случай невозможен, потому что тогда луч *BC* будет разделять точки *A* и *X*, что противоречит рассматриваемому случаю. Значит луч *BX* проходит между сторонами угла *ABC*, и тогда он пересекает отрезок *AC* в некоторой точке *O*. Точка *O* лежит на прямой *AC*, все точки которой неподвижны и, следовательно, точка *O* тоже неподвижна. Точка *B* неподвижна по условию, значит вся прямая *BO* неподвижна, включая точку *X*.

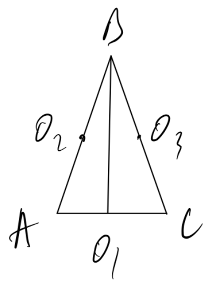
Второй случай. Пусть точка *X* не лежит внутри треугольника *ABC*. Для определённости будем считать, что т. *X* не лежит в полуплоскости т. *A* относительно прямой *BC*. Тогда отрезок *AX* пересекает прямую *BC* в некоторой точке *O*. Точка *O* лежит на прямой *BC*, все точки которой неподвижны, следовательно две точки прямой *AX* тоже неподвижны и, следовательно, все точки этой прямой, включая точку *X* неподвижны.

69) Пусть AB и A_2B_2 два произвольных равных отрезка. Соединим отрезком точки A и A_2 и проведём через середину этого отрезка перпендикулярную к нему прямую s_1. Симметрия относительно этой прямой переводит точку A в A_2, а точку B в некоторую точку B_1. Если точка B_1 не совпадает с B_2 (в этом случае отрезки AB и A_2B_2 совместятся), то соединим теперь отрезком точки B_1 и B_2 и проведём прямую s_2 через середину отрезка B_1B_2 и точку A_2. Треугольник $A_2B_1B_2$ равнобедренный, следовательно прямая s_2 перпендикулярна B_1B_2. Значит симметрия относительно прямой s_2 переводит точку B_1 в B_2, и таким образом совмещает отрезки A_2B_1 и A_2B_2.



70) Пусть точки A и B симметричны относительно прямой a. O – точка пересечения a и отрезка AB. Тогда $AB \perp a$ и $AO = OB$. Пусть c прямая, симметричная a относительно прямой b, A_1 и B_1 точки симметричные A и B относительно прямой b, O_1 – точка, симметричная O относительно прямой b. Поскольку движение сохраняет расстояния и углы $A_1O_1 = O_1B_1$ и $A_1B_1 \perp c$, следовательно точка A_1 симметрична B_1 относительно прямой c. Получаем, что прямая с является осью симметрии фигуры.

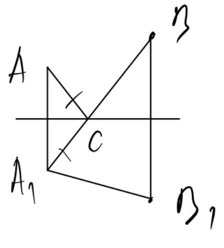
71) При движении концы отрезков переходят в концы соответствующих отрезков. Значит, если треугольник ABC при симметрии относительно своей оси переходит в себя, то его вершины переходят друг в друга. С точностью до обозначений можно записать два варианта соответствия: *B-C, C-B, A-A* и *B-C, C-A, A-B*. Докажем, что второй вариант не возможен.



В случае второго варианта ось симметрии должна проходить через середины отрезков AC, AB и BC, обозначим их O_1, O_2 и O_3. При этом $O_1O_2 \parallel AB$ и $O_1O_3 \parallel AC$ как средние линии, следовательно точки O_1, O_2, O_3 не лежат на одной прямой.

Остаётся только первый случай соответствия вершин. Тогда ось симметрии треугольника проходит через вершину A и точку O_1, перпендикулярно BC. Тогда AO_1 является медианой и высотой треугольника ABC, следовательно треугольник ABC равнобедренный.

72) Пусть точки A и B лежат в разных полуплоскостях. Тогда искомой точкой будет точка пересечения отрезка AB с прямой. Для любой другой точки X будет выполняться неравенство $AB < AX + BX$, значит, $AC + AB < AX + BX$.



Пусть точки A и B лежат в одной полуплоскости. Зеркально отразим точку A в точку A_1. Отрезок BA_1 будет пересекать прямую в некоторой точке C. $A_1C = AC$ по свойству движения. Для любой другой точки X прямой $AX = A_1X \Rightarrow A_1B < A_1X + BX \Rightarrow$ $AC + BC < AX + BX \Rightarrow C$ и есть искомая точка.

73) При движении точка пересечения прямых переходит в точку пересечения соответствующих прямых. Следовательно, если при симметрии треугольник переходит в себя, то его вершины должны соответствовать друг другу. С точностью до обозначений можно записать два варианта такого соответствия: B-C, C-B, A-A и B-C, C-A, A-B.

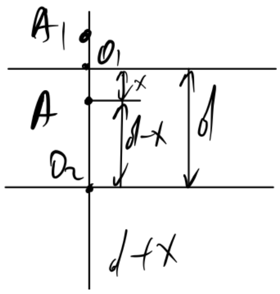
В первом варианте вершина A должна быть центром симметрии треугольника, но тогда вершины B и C лежат на прямой, содержащей A, что противоречит определению треугольника. Во втором варианте центр симметрии должен принадлежать прямым BC, CA и AC, но эти прямые не пересекаются в одной точке. Следовательно треугольник не может иметь центра симметрии.

74) Пусть произвольные точки C и D данной фигуры симметричны относительно точки A. Тогда точки C, A, D лежат на одной прямой и $CA = AD$. Пусть точки C и C_1, D и D_1 симметричны относительно точки B. Так как при движении сохраняются расстояние и порядок точек на прямой, то $CA = C_1A_1$ и $DA = D_1A_1$, причём точки C_1, A_1, D_1 лежат на одной прямой. Следовательно точки C_1 и D_1 симметричны относительно точки A_1, и, значит, A_1 тоже является центром симметрии данной фигуры.

75) Если два движения переводят точки A, B, C в одни и те же точки A_1, B_1, C_1, то эти движения совпадают, то есть переводят произвольную точку X плоскости в одну и ту же точку X_1. Доказательство аналогично номеру 68). Таким образом, перемещение трёх точек A, B, C определяет всё движение, то есть перемещение всех остальных точек плоскости.

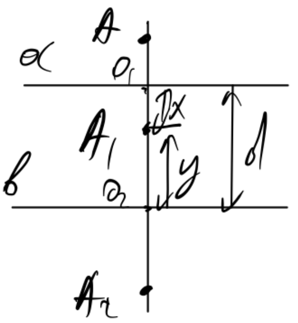
Пусть данное движение переводит некоторые три точки A, B, C в точки A_1, B_1, C_1. Как показано в теории, эти три точки можно построить из A, B, C тремя зеркальными отражениями. Значит, и все остальные точки плоскости переходят в соответствующие им при данном движении точки при тех же трёх отражениях. Следовательно, данное движение может быть получено тремя зеркальными отражениями.

76) Пусть $a||b$, расстояние между прямыми a и b равно d, и A – произвольная точка плоскости. После симметрии относительно прямой a точка A переходит в точку A_1, а после симметрии отностельно прямой b точка A_1 переходит в A_2. O_1 – точка



пересечения AA_1 с a, O_2 – точка пересечения A_1A_2 с прямой b.

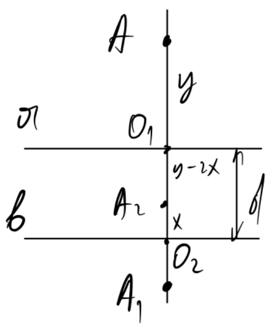
Рассмотрим варианты расположения точки A относительно прямых a и b.



1. Если точка A находится в одной полуплоскости с прямой b относительно прямой a и в полуплоскости прямой a относительно прямой b на расстоянии x от прямой a, тогда $AA_2 = AO_2 + A_2O_2 = d - x + d + x = 2d$.

2. Если точка A находится в полуплоскости, не содержащей прямую b, относительно прямой a на расстоянии $x<d$ от прямой a, то $|AA_2| = 2x + 2y = 2(x+y) = 2d$.

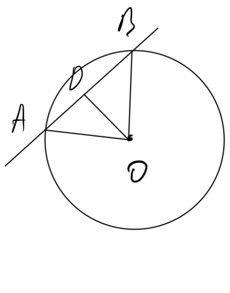
3. Если A находится в полуплоскости, не содержащей прямую b, относительно прямой a на расстоянии $x>d$ от прямой a, то $|AA_2| = AO_1 + O_1A_2 = y + y - 2x = 2y - 2x = 2(y–x) = 2d$.



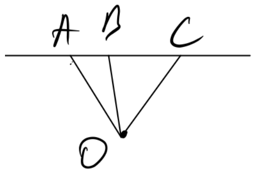
Таким образом, во всех трёх случаях точки плоскости смещаются по прямым, перпендикулярным прямым a и b на расстояние, равное двум расстояниям между прямыми a и b, то есть $2d$. Следовательно такое движение является параллельным переносом на расстояние $2d$.

77) Пусть X – произвольная точка плоскости, X_1 – симметричная ей точка относительно точки A, X_2 – точка симметричная X_1 относительно точки B. Если точка X не лежит на прямой AB, то AB – средняя линия треугольника XX_1X_2, следовательно $XX_2 \parallel AB$ и $XX_2 = 2AB$. То есть произвольная точка X смещается по прямой, параллельной AB на расстояние $2AB$.

Если точка X лежит на прямой AB, то доказательство аналогично доказательству теоремы 65 для случая, когда точка X лежит на прямой O_1O_2.



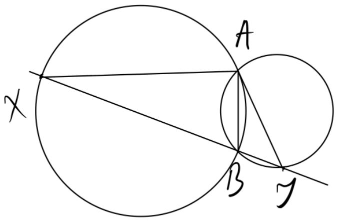
78) Пусть A – общая точка прямой и окружности и радиус OA не перпендикулярен прямой. Опусти из центра окружности на прямую перпендикуляр OD и отложим от точки D на прямой отрезок $DB = DA$ так, чтобы точка B не совпадала с A. Тогда в прямоугольных треугольниках AOD и BOD: OD – общая сторона, $AD = DB \Rightarrow \Delta AOD = \Delta BOD \Rightarrow OB = OA \Rightarrow$ точка B принадлежит окружности.

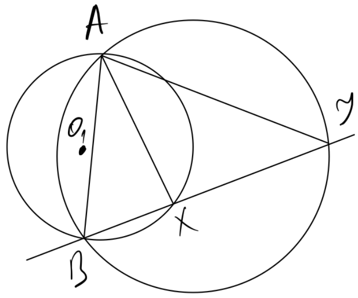


79) Допустим, что прямая пересекает окружность с центром O в трёх точках A, B, C. Тогда $OA = OB = OC$. Пусть точка B лежит между точками A и C.

Углы *OBA* и *OBC* смежные и не равные друг другу (если бы они были равны, то были бы прямыми, то *OB* был бы перпендикуляром к прямой и, следовательно, *OC* > *OB* по свойству наклонной и перпендикуляра). Значит, один из них больше 90°, а другой меньше 90°. Пусть, например, $\angle OBA > 90°$, тогда в равнобедренном треугольнике *OAB* $\angle OAB = \angle OBA$ и получается, что два угла в треугольнике больше 90°, что невозможно так как сумма углов в треугольнике 180°. Значит, прямая не может пересекать окружность в трёх точках.

80) Рассмотрим два случая: если точки *X* и *Y* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *AB*, и если *X* и *Y* лежат в одной полуплоскости.

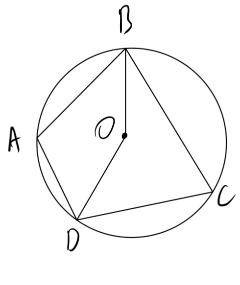




1 случай. Пусть точка *B* лежит между точками *X* и *Y*. Рассмотрим треугольник *XAY*. В нём угол *AXB* опирается на дугу *AB* (не содержащую т. *X*) первой окружности, а угол *AYB* опирается на дугу *AB* второй окружности. Эти углы не зависят от положения точек *X* и *Y* на окружности, следовательно, угол *XAY* тоже не зависит от положения прямой *AB*.

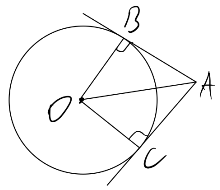
2 случай. Пусть точки *X* и *Y* лежат в одной полуплоскости. Для определённости пусть *X* лежит в полуплоскости центра второй окружности (но принадлежит первой окружности), то есть точка *X* лежит между точками *B* и *Y*. Тогда $\angle Y$ не изменился по сравнению с первым случаем, а $\angle AXY = 180° - \angle AXB = 180° - \frac{1}{2}\angle AO_1B = 180° - \frac{1}{2}$ $(360° - \angle AO_1B^{(1)}) = \frac{1}{2}\angle AO_1B^{(1)} = \angle AXB^{(1)}$, где $\angle AO_1B^{(1)}$ – дополнительный центральный угол угла $\angle AO_1B$, а $\angle AXB^{(1)}$ – угол, равный углу *AXB* в треугольнике *XAB*, рассмотренном в первом случае. Получаем, что в треугольнике *AXY* углы *AYX* и *AXY* равны углам $Y^{(1)}$ и $AXY^{(1)}$ из первого случая, следовательно, угол *XAY* тоже не изменился.

81) Пусть *ABCD* – выпуклый четырёхугольник, вписанный в окружность с центром *O*. Так как четырёхугольник вписанный, то точки *A* и *C* лежат в разных полуплоскостях относительно диагонали *BD*. Пусть для определённости дуга *BD*, содержащая точку *A*, меньше полуокружности, а дуга содержащая точку *C* больше



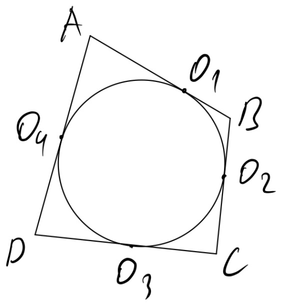
полуокружности. Вписанный угол BAD равен половине угла BOD, вписанный $\angle BCD = \frac{1}{2}(360° - \angle BOD) = 180° - \frac{1}{2}\angle BOD$.

$\angle BAD + \angle BCD = 180°$, аналогично доказывается, что $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.



82) Прямоугольные треугольники OBA и OCA равны по катету и гипотенузе ($OB = OC$ – радиусы окружности, OA – общая), следовательно, $AB = AC$.

83) Пусть $ABCD$ – описанный четырёхугольник. Стороны AB, BC, DC и AD касаются окружность в точках O_1, O_2, O_3 и O_4 соответственно.



Используя условие с задачи 82, получаем $BO_1 = BO_2$.

$CO_2 = BC - BO_2 = BC - BO_1$

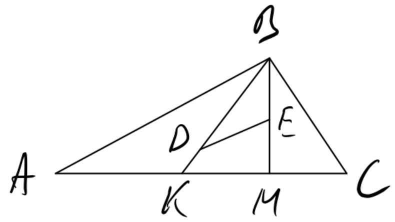
$CO_3 = CO_2 = BC - BO_1$ (1)

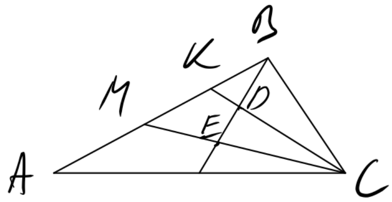
$AO_1 = AO_4 \Rightarrow DO_4 = DA - AO_4 = DA - AO_1$

$DO_3 = DO_4 = DA - AO_1$ (2)

$DC = DO_3 + CO_3 \stackrel{(1,2)}{=} BC - BO_1 + DA - AO_1 = BC + DA - (BO_1 + AO_1) = BC + DA - AB \Rightarrow DC + AB = BC + DA.$

84) Пусть ABC – некоторый треугольник, и точки D и E лежат внутри треугольника ABC. Пусть AC – наибольшая сторона в ΔABC, докажем, что $DE < AC$.





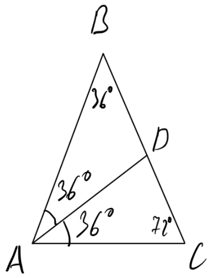
<u>1 случай</u>. Проведём луч BD. Так как D лежит в одной полуплоскости с т. A относительно BC и в одной полуплоскости с т. C относительно BA, то луч BD проходит между BA и BC. Следовательно, луч BD пересекает отрезок AC с концами на сторонах угла ABC в некоторой точке K.

Аналогично луч BE пересекает отрезок AC в некоторой точке M. Точки K и M лежат между A и C, следовательно $KM < AC$. Из ΔBKM получаем, что $DE < KM$, значит $DE < AC$ (см. задачу 34).

<u>2 случай</u>. Если точки *B, D* и *E* лежат на одной прямой, проведём лучи *CD* и *CE*, которые пересекают *AB* в точках *K* и *M*, аналогично случаю 1: $DE < KM < AB < AC \Rightarrow DE < AC$.

85) Если $\Delta ABC \sim \Delta BCA$, то по определению подобия $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle C$, $\angle C = \angle A \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

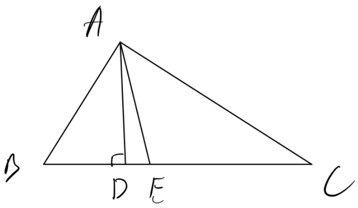
86) Пусть треугольники *ABC* и $A_1B_1C_1$ равнобедренные с основаниями *BC* и B_1C_1. Если $\angle A = \angle A_1$, то $\angle B = \dfrac{180° - \angle A}{2}$ и $\angle B_1 = \dfrac{180° - \angle A_1}{2} \Rightarrow \angle B = \angle B_1$ – два угла в треугольниках равны $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



87) Пусть *ABC* – равнобедренный треугольник с основанием *AC*, $\angle B = 36°$. Тогда $\angle BAC = \angle C = 72°$.

В треугольнике *ACD* (*AD* – биссектриса угла *BAC*) $\angle C = 72°$, $\angle DAC = 72°/2 = 36°$. Получаем, что в треугольниках *ABC* и *DAC* $\angle ABC = \angle DAC$, $\angle BCA = \angle ACD \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DAC$ по двум углам.

88) Пусть в треугольнике *ABC* $\angle A = 90°$, *AD* – высота, *AE* – биссектриса.



По теореме 81 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{m}{n}$ (1)

$\angle BAD = \angle ACB$ (оба угла дополняют $\angle ABC$ до 90° в треугольниках *ABD* и *ABC*) $\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta CAD \Rightarrow$

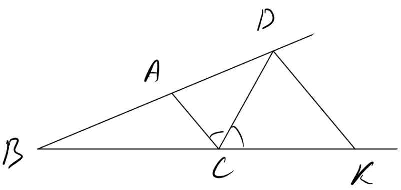
$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{AD}$.

По теореме 80 $AD = \sqrt{BD \cdot DC}$, тогда

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{\sqrt{BD \cdot DC}} = \sqrt{\dfrac{BD}{DC}}$ (2)

Из (1) и (2) $\Rightarrow \sqrt{\dfrac{BD}{DC}} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{m^2}{n^2}$.

89) Возможно два случая расположения точек на прямой *AB*: либо точка *A* лежит между *B* и *D*, либо точка *B* лежит между *A* и *D*. Рассмотрим случай, когда *A* лежит между *B* и *D* (второй доказывается аналогично).



1) Проведём через точку *D* прямую, параллельную *AC*.

Она пересечёт прямую *BC* в некоторой точке *K*.

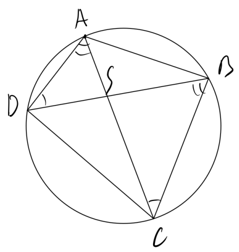
$\angle ACD = \angle KDC$ – как н/л и $ACD = \angle DCK$ – DC биссектриса $\Rightarrow \angle KDC = \angle DCK \Rightarrow DK = CK$ (1).

2) DK || AC $\Rightarrow \angle BAC = \angle BDK \Rightarrow \Delta BAC \sim \Delta BDK \Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BC}{BK}$;

$$\frac{BD - AD}{BD} = \frac{BK - CK}{BK};$$
$$1 - \frac{AD}{BD} = 1 - \frac{CK}{BK};$$
$$\frac{AD}{BD} = \frac{CK}{BK} \overset{(1)}{=} \frac{DK}{BK}. \qquad (2)$$

3) Из подобия $\Delta BAC \sim \Delta BDK \Rightarrow \dfrac{DK}{AC} = \dfrac{BK}{BC} \Rightarrow \dfrac{DK}{BK} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow$ с учётом (2) $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}$.

90) Опишем окружность около треугольника *ADB* и проведём прямую *AS*, где *S* – точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Прямая *AS* пересечёт окружность в некоторой точке C_1, лежащей в одной полуплоскости с точкой *D* (именно, в полуплоскости точки *S*) относительно *AB*. По теореме 82 $C_1S = \dfrac{DS \cdot BS}{AS}$. По условию четырёхугольник *ABCD* – выпуклый, значит, точка *C* лежит в одной полуплоскости с точкой *D* относительной прямой *AB* и $CS = \dfrac{DS \cdot BS}{AS} \Rightarrow$ точки *C* и C_1 совпадают $\Rightarrow$ точка *C* лежит на окружности, описанной около треугольника *ABD*, и эта окружность описана около четырёхугольника *ABCD*.



91) $h = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4-1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

92) <u>Вписанной</u>. В равностороннем треугольнике биссектрисы совпадают с медианами и высотами, следовательно, каждая из них равна $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (см. № 92). Медианы, а значит и биссектрисы, делятся точкой их пересечения в отношении 2:1 считая от вершины. Эта точка является центром вписанной окружности, а точки касания этой окружности совпадают с основаниями биссектрис, совпадающих с высотами. Значит, $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

<u>Описанной</u>. В случае равностороннего треугольника медианы являются частью серединных перпендикуляров и точка их пересечения является центром описанной окружности. Расстояние от этой точки до вершин треугольника равно $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

93) Из теорем 88 и 89 следует, что либо

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD, \qquad (1)$$

либо

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD. \qquad (2)$$

Если $AB^2 < AC^2 + CB^2$, то выполняется равенство (2), которое верно, когда угол C – острый; если $AB^2 > AC^2 + CB^2$, то выполняется равенство (1), которое верно, когда угол C – тупой.

94) Пусть $OE < OF$. Так как треугольники AOB и COD равнобедренные, то высоты OE и OF – медианы. По теореме Пифагора

$$OE^2 = OB^2 - \left(\frac{BE}{2}\right)^2;$$

$$OF^2 = OC^2 - \left(\frac{CF}{2}\right)^2.$$

$OB = OC$ (как радиусы), $OE < OF \Rightarrow R^2 - \frac{1}{4}CF^2 < R^2 - \frac{1}{4}CF^2 \Rightarrow CF^2 < BE^2 \Rightarrow CF < BE \Rightarrow$

$CD < AB.$

95) Воспользуемся равенствами

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \pm 2AB \cdot AH,$$

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 \pm 2AD \cdot AH.$$

(Заменили O на D и D на H). Первое равенство умножим на AD, второе на AB и вычтем второе из первого.

$$CD^2 \cdot AB - BC^2 \cdot AD = AC^2 \cdot AB - AC^2 \cdot AD + AD^2 \cdot AB - AB^2 \cdot AD$$

$$CD^2 \cdot AB = BC^2 \cdot AD + AB(AC^2 + AD^2) - AD(AC^2 + AB^2)$$

$$CD^2 = \frac{BC^2 \cdot AD}{AB} + AC^2 + AD^2 - \frac{AD}{AB}(AC^2 + AB^2)$$

Воспользуемся свойством биссектрисы: $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}; AB = AD + BD$

$$CD^2 = \frac{BC^2 \cdot AD}{AD + BD} + AC^2 + AD^2 - \frac{AD \cdot AC^2}{AD + BD} - AD \cdot (AD + BD)$$

$$CD^2 = \frac{\frac{BC}{BD} BC \cdot AD}{\frac{AD}{BD} + 1} + AC^2 + AD^2 - \frac{\frac{AD}{BD} AC^2}{\frac{AD}{BD} + 1} - AD^2 - AD \cdot BD$$

$$CD^2 = \frac{AC \cdot BC - \frac{AC}{BC} AC^2}{\frac{AD}{BD} + 1} + AC^2 - AD \cdot BD$$

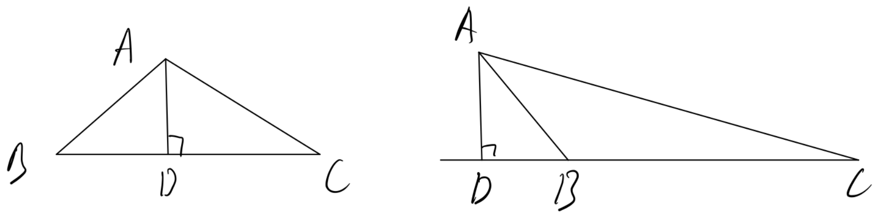
$$CD^2 = \frac{AC \cdot BC^2 - AC^3}{AC + BC} + AC^2 - AD \cdot BD$$

$$CD^2 = \frac{AC(BC - AC)(BC + AC)}{AC + BC} + AC^2 - AD \cdot BD$$

$$CD^2 = AC \cdot BC - AC^2 + AC^2 - AD \cdot BD$$

$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD$

96) Упростим выражение



$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{16}} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{((a+b)^2-c^2)(c^2-(b-a)^2)} = \frac{1}{2a}\sqrt{(a^2+2ab+b^2-c^2)(c^2-b^2+2ab-a^2)} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{a^2c^2-b^2a^2+2a^3b-a^4+2abc^2-2ab^3+4a^2b^2-2a^3b+b^2c^2-b^4+2ab^3-a^2b^2-c^4+b^2c^2-2abc^2+a^2c^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2}$$

Теперь рассмотрим треугольник ABC, где $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$. По теоремам 88 и 89 $AC^2 = AB^2 + BC^2 \pm 2BC \cdot BD$ (знак определяется углом B).

$c^2 = b^2 + a^2 \pm 2aBD$

$$BD = \pm\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}$$

$$AD^2 = b^2 - BD^2 = b^2 - \frac{(b^2+a^2-c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2-(b^2+a^2-c^2)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{4a^2b^2-b^4-b^2a^2+b^2c^2-a^2b^2-a^4+a^2c^2-c^4+c^2b^2+c^2a^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2c^2+2b^2c^2+2a^2b^2}{4a^2}$$

$$AD = \frac{1}{2a}\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2c^2+2b^2c^2+2a^2b^2} = h_a$$

97) $\Delta BKC \backsim \Delta ABC$ (см. задачу 87)

$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{KC} \Rightarrow BC^2 = AB \cdot KC$ **(*)**

так как BK биссектриса, то $\frac{BC}{KC} = \frac{AB}{AK} \Rightarrow \frac{BC}{KC} = \frac{AB}{AC-KC}$

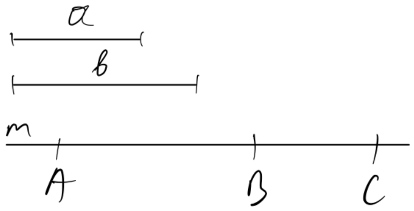
так как $AC = AB$, то $BC \cdot AB - BC \cdot KC = AB \cdot KC$

$KC = \frac{BC \cdot AB}{AB+BC}$ – подставляем в (*)

$$BC^2 = \frac{AB \cdot BC \cdot AB}{AB+BC} \Rightarrow BC = \frac{1}{1+BC} \Rightarrow BC^2 + BC - 1 = 0$$

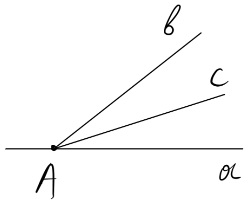
$$BC = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

98) Пусть a и b данные отрезки, причём $b > a$. Проведём произвольную прямую m.



Обозначим A произвольную точку этой прямой. Отложим от точки A отрезок AB, равный b. Построим окружность радиуса a с центром B и обозначим C и D точки пересечения этой окружности с прямой m. Пусть для определённости точка D лежит между точками A и B, а точка B между точками A и C. Тогда отрезок AC – искомая сумма отрезков a и b, а отрезок AD – искомая разность b и a.

99) Пусть O_1 и O_2 – данные углы. Проведём произвольную прямую и обозначим A



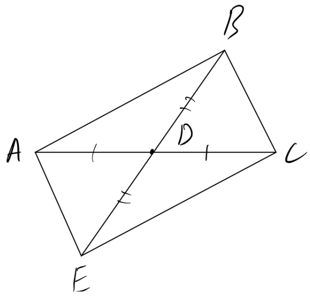
какую-нибудь точку на этой прямой. Пусть a – одна из полупрямых с начальной точкой A. Отложим от a в одну полуплоскость два угла (ab) и (ac), равные данным. Если $O_1 > O_2$, то луч c проходит между лучами b и a. Тогда угол (bc) – искомый.

100) Разделить данный отрезок пополам и один из полученных отрезков тоже разделить пополам.

101) Разделить данный угол пополам и один полученных углов тоже разделить пополам.

102) 1. Проведём прямую AC и отложим от полупрямой AC угол, равный A на построенной стороне которого отложим отрезок AB. Проведём отрезок BC. Построенный треугольник ABC – искомый.
2. Проведём прямую и отметим на ней точку A. От точки A отложим отрезок AB. От полупрямой AB отложим угол, равный A. Построим окружность с центром B и радиусом BC. Точка C будет лежать на пересечении этой окружности со стороной угла A. Проведя BC получим треугольник ABC.
3. Отложим от полупрямой AB угол A и отложим от полупрямой BA угол B. Тогда C – точка пересечения сторон BC и AC.

103) 1. Построим отрезок AB, построим окружность с центром B и радиусом BC.

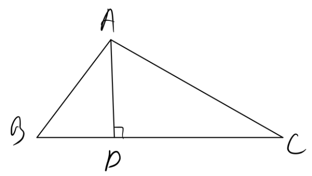


Построим середину отрезка AB и проведём окружность с центром в середине AB и радиусом, равным данной медиане. Пересечение этой окружности с первой окружностью есть точка C.
2. Построим произвольную прямую и отметим на ней точку A. От точки A отложим отрезок AB, данный по условию. Построим отрезок m, равный удвоенной медиане BD, проведённой к стороне AC. Построим окружность с центром

A и радиусом *BC* и окружность с центром *B* и радиусом *m*. Обозначим *E* точку пересечения этих окружностей. Проведём прямую *EB* и разделим отрезок *EB* пополам. Точка *D* – середина *EB*. Проведём прямую *AD*. Построим окружность с центром *B* и радиусом *BC, C* – точка пересечения окружности с прямой *AD*.

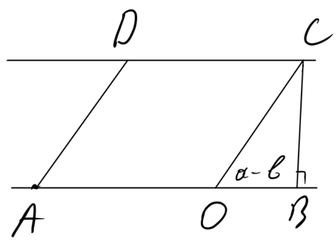
Треугольник *ABC* – искомый так как в нём *AB* и *BC* равны данным по построению и медиана *BD* равна половине отрезка *m*, где *m* – удвоенная данная медиана.

104) Проведём произвольную прямую и отметим на ней точку *D*. Из точки *D*



построим перпендикуляр к прямой и отложим на нём отрезок *DA*, равный данной высоте. Построим окружность с центром *A* и радиусом, равным *AB*, *B* – точка пересечения окружности с прямой. Отложим на полупрямой *BD* отрезок *BC*. Треугольник *ABC* – искомый.

105) Уточнение: можно построить только если известно, какие стороны являются



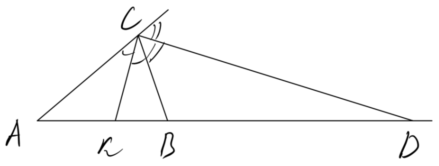
основаниями, а какие боковыми.
Пусть даны основания $a > b$ и боковые стороны *c* и *d*. Построим отрезок, равный *a* и вычтем из него отрезок *b*. Получим отрезок, равный $a - b$. На этом отрезке, как на основании, построим треугольник со сторонами *c* и *d*. Пусть *C* – вершина этого треугольника, не являющаяся концом основания. Построим прямую, проходящую через точку *C* и параллельную прямой *a*. На этой прямой в полуплоскость где лежит конец отрезка, равного *a*, отложим отрезок, равный *b*. Обозначим *A* и *B* концы отрезка, равного *a*, а конец отложенного отрезка, равного *b*, обозначим *D*. Проведём отрезок *AD*. Тогда *ABCD* – искомая трапеция.

Доказательство. $DC \parallel AB$ и $DC = b$, $AB = a$ – по построению, *BC* равен либо *c*, либо *d* по построению. Пусть *O* – конец отрезка, отложенного от точки *A* и равного *b*, тогда $AO = DC$ и $AO \parallel DC \Rightarrow AOCD$ – параллелограмм $\Rightarrow AD = OC.$ Если $BC = d$, то $OC = c$ и наоборот, если $BC = c$, то $OC = d \Rightarrow$ стороны *AD* и *BC* равны отрезкам *d* и *c*.

106) $x = \dfrac{abc}{de} \Rightarrow \dfrac{dx}{a} = \dfrac{bc}{e}$. Построим отрезок $m = \dfrac{bc}{e}$, затем построим отрезок $x = \dfrac{am}{d}$.

107) см. рисунок к задаче 10 на построение. $\sqrt{ab} = CD_1, \dfrac{a+b}{2} = OB$. Так как точка D_1 лежит на окружности с радиусом *OB*, хорда D_1D_2 не больше диаметра, равного $2OB \Rightarrow D_1D_2 = 2CD_1 \le 2OB \Rightarrow CD_1 \le OB \Rightarrow \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

108) Пусть биссектриса внутреннего угла *C* пересекает *AB* в точке *K*, а биссектриса внешнего угла *C* – в точке *D*. По теореме 81

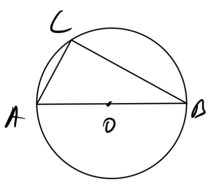


$\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AK}{KB} = const$, а в соответствии с задачей 89

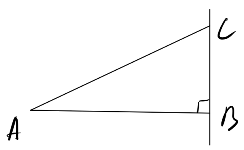
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AB + BD}{BD} = \frac{AB}{BD} + 1 = const.$$

Так как положение точек *A* и *B*, а также отношение $\dfrac{AC}{BC}$ не меняется, то и положение точек *K* и *D* на прямой *AB* не меняется.

Угол *KCD* равен половине развёрнутого угла, то есть 90°. Опишем около треугольника *KCD* окружность. Так как $\angle KCD = 90°$, то *KD* – диаметр этой окружности и, следовательно, точка *C* лежит на окружности с диаметром *KD*. Эта окружность является указанным ГМТ.

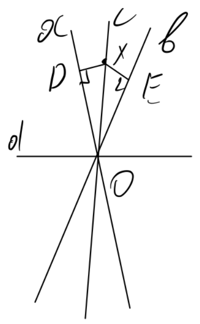


109) Пусть *C* – точка принадлежащая указанной окружности. Тогда угол *ACB* – прямой, так как опирается на диаметр ⇒ $AC^2 + BC^2 = AB^2$ – постоянно, то есть *C* принадлежит данному ГМТ. Если точка *C* не лежит на указанной окружности, то угол *ACB* либо тупой, либо острый. Тогда $AC^2 + BC^2 \neq AB^2$ (т. 88 и 89).



110) Проведём через точку *B* прямую, перпендикулярную *AB*. Если точка *C* лежит на этой прямой, то $AC^2 – BC^2 = AB^2$ – постоянно. Если точка *C* не принадлежит этой прямой, $AC^2 – BC^2 \neq AB^2$ (т. 88 и 89).

111) Пусть *O* – точка пересечения данных прямых *a* и *b*; *c* и *d* – прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных *a* и *b*. Пусть *X* – точка на биссектрисе угла (*ab*), *XD* и *XE* – перпендикуляры, опущенные на прямые *a* и *b* из точки *X*. Прямоугольные треугольники *ODX* и *OEX* равны по гипотенузе и острому углу, следовательно $DX = EX$, то есть точка *X* равноудалена от прямых *a* и *b*.



Пусть точка *Y* равноудалена от прямых *a* и *b*, *YF* и *YZ* – перпендикуляры, опущенные из точки *Y* на прямые *a* и *b*. Тогда прямоугольные треугольники *YFO* и *YZO* равны по гипотенузе и катету, следовательно, $\angle FOY = \angle FOZ$, значит *OY* – биссектриса угла, образованного прямыми *a* и *b*.

112) Пусть m – данное расстояние от точки C, тогда искомая точка будет находиться на пересечении серединного перпендикуляра к AB и окружности радиуса m с центром C.

113) Построим биссектрисы углов ABC и BCA, точка пересечения биссектрис равноудалена от прямых AB, BC и CA (задача 111).

114) Построим биссектрисы углов, образованных данными прямыми, проведём окружность с центром в данной точке и с данным радиусом. Точки пересечения окружности с биссектрисами – искомые (задача 111).

115) Пусть R – данный радиус. Центр O окружности удалён на расстояние R от сторон угла. ГМТ равноудалённых от сторон угла есть биссектриса этого угла, ГМТ находящихся на расстоянии R от одной из стороны угла есть прямая, параллельная стороне угла. Точка O находится на пересечении данной прямой и биссектрисы.

116) Пусть даны окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2 отрезок R равный радиусу искомой окружности.

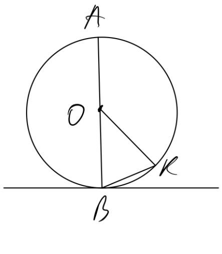
Из центра первой окружности построим окружность с радиусом $R + r_1$, а из центра второй – окружность с радиусом $R + r_2$. Обозначим одну из их точек пересечения A и построим окружность с радиусом R и центром A. Эта окружность является искомой.

Нет решений, если $R < \frac{1}{2}(O_1O_2 - r_1 - r_2)$.

Одно решение, если $R = \frac{1}{2}(O_1O_2 - r_1 - r_2)$.

Два решения, если $R > \frac{1}{2}(O_1O_2 - r_1 - r_2)$.

117) Построим перпендикуляр AB и окружность с радиусом OA и центром O (середина AB). Докажем, что эта окружность является искомым ГМТ.



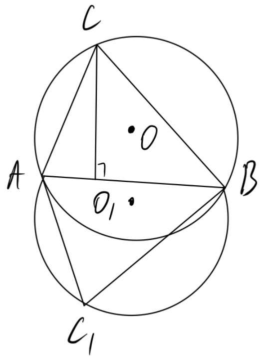
Если прямая, проходящая через точку B, является касательной к построенной окружности, то AB перпендикулярна этой прямой по определению касательной и основания перпендикуляра лежат на окружности. Если прямая, проходящая через точку B не является касательной, то она пересекает окружность в ещё одной точке K (см. задачу 78). Докажем, что $AK \perp BK$.

ΔOBK – равнобедренный $\Rightarrow \angle OKB = \dfrac{180^\circ - \angle BOK}{2} = 90^\circ - \dfrac{\angle BOK}{2}$.

ΔOKA – равнобедренный $\Rightarrow \angle OKA = \dfrac{180^\circ - \angle AOK}{2} = 90^\circ - \dfrac{1}{2}(180^\circ - \angle BOK) = \dfrac{\angle BOK}{2}$.

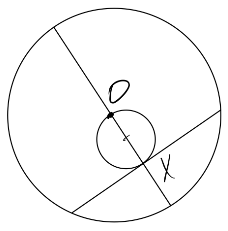
Луч *KO* пересекает отрезок *AB* в точке *O* $\Rightarrow$ проходит между сторонами угла *BKA*, тогда $\angle BKA = \angle OKB + \angle OKA = 90^\circ - \dfrac{\angle BOK}{2} + \dfrac{\angle BOK}{2} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp BK \Rightarrow K$ – основание перпендикуляра, опущенного на прямую *BK* из точки *A,* и принадлежащее окружности с центром *O* и радиусом *OA*.

118) Пусть *ABC* – треугольник с данным основанием и углом при вершине *C*. Построим описанную около него окружность. Дуга *AB* этой окружности, содержащая точку *C*, часть искомого ГМТ. Построим дугу симметричную данной относительно прямой *AB* – она будет второй частью ГМТ. Совокупность этих дуг является искомым ГМТ.

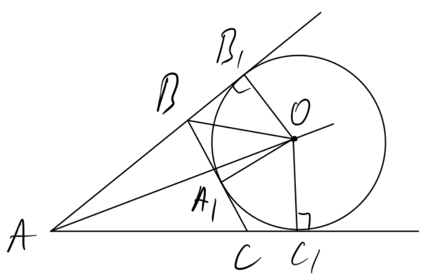


119) - Построим угол C_1, равный данному.
- На стороне угла выберем произвольную точку *B* и построим из неё окружность с радиусом, равным основанию *AB*. Обозначим *A* точку пересечения этой окружности со второй стороной угла C_1.
-Построим серединные перпендикуляры сторон *AB* и AC_1 и из точки их пересечения построим окружность с радиусом *OA*. Эта окружность описана около треугольника ABC_1.
-Построим в полуплоскости точки C_1 относительно *AB* прямую, параллельную *AB* и проходящую от прямой *AB* на расстоянии, равном данной высоте. Одну из точек пересечения этой прямой с окружностью обозначим *C*. Треугольник *ABC* – искомый. В нём $\angle C = \angle C_1$ так как они опираются на одну и ту же дугу окружности.

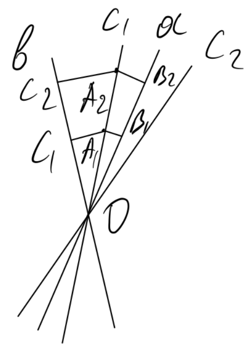
120) Пусть *O* – центр окружности и *X* некоторая точка. Середины хорд, проходящих через точку *X*, являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки *O* к соответствующим хордам. ГМТ оснований перпендикуляров, опущенных из точки *O* на прямые, проходящие через точку *X,* является окружность с центром в середине отрезка *OX* и радиусом, равным половине отрезка *OX* (см. задачу 117).



121) Одна из этих окружностей, это окружность, вписанная в треугольник *ABC*.



Построим полупрямую, дополнительную к полупрямой *BA* и полупрямую, дополнительную к полупрямой *CA*. Построим биссектрису угла *A* и биссектрису внешнего угла при вершине *B*, образованного полупрямой, дополнительной *BA*. Эти биссектрисы пересекаются в некоторой точке *O*. Опустим перпендикуляры OB_1 на *AB*, OC_1 на *AC* и



OA_1 на BC. $\Delta AOB_1 = \Delta AOC_1$ по гипотенузе AO и углу $\angle B_1AO = \angle C_1AO \Rightarrow OB_1 = OC_1$; $\Delta OBB_1 = \Delta OBA_1$ по гипотенузе BO и углу $\angle OBB_1 = \angle OBA_1 \Rightarrow OB_1 = OA_1$. Получаем, что окружность с центром в точке O и радиусом OA_1 касается прямых AB, AC и BC. Таких окружностей можно построить три, с учётом вписанной окружности, существует четыре окружности, отвечающие условию задачи.

122) Пусть прямые a и b пересекаются в точке O. Построим ГМТ для которых отношение расстояния до прямых a и b равно k. Проведём прямую, параллельную прямой a на расстоянии 1 от a и прямую, параллельную прямой b, на расстоянии $\frac{1}{k}$, от b, отметим точку пересечения этих прямых. Проведём через эту точку и O прямую c_1. Аналогично построим две прямые, параллельные a и b в другой полуплоскости, через точку их пересечения и O проведём прямую c_2. Прямые c_1 и c_2 составляют искомое ГМТ.

Возьмём произвольные точки A_1 и A_2 на прямой c_1. Опустим перпендикуляры перпендикуляры A_1B_1 и A_2B_2 на прямую a и перпендикуляры A_1C_1 и A_2C_2 на прямую b.

$\Delta A_1OB_1 \backsim \Delta A_2OB_2$ по 2 углам $\Rightarrow \dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{A_1O}{A_2O}$ и $\Delta A_1OC_1 \backsim \Delta A_2OC_2 \Rightarrow \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2} = \dfrac{A_1O}{A_2O}$

Значит, $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2} \Rightarrow \dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{A_2C_2} = \dfrac{1}{k}$

Для прямой c_2 доказательство аналогично. Докажем, что нет других точек, принадлежащих ГМТ, кроме точек прямых c_1 и c_2.

Пусть X и Y – точки прямой c_1, лежащие по разные стороны от точки O. Будем называть I и III четвертями части плоскости, такие, что их точки лежат в одной полуплоскости с точкой X относительно прямой a и в одной полуплоскости с X относительно b (I четверть), либо в одной полуплоскости с точкой Y относительной прямой a и в одной полуплоскости с Y относительно b (III четверть).

Пусть A' – некоторая точка, принадлежащая прямой c_1 и лежащая в I или III четверти, такая, что отношение расстояний от A' до прямых a и b равно $\frac{1}{k}$.

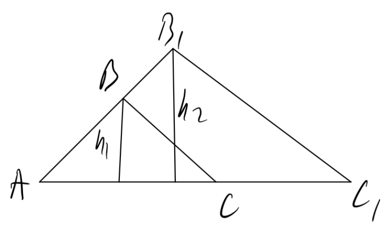
Проведём через точку A' прямую, параллельную a и обозначим A_1 точку пересечения этой прямой с c_1. Точки A' и A_1 вместе принадлежат либо I, либо III четверти. Пусть $A'B'$ и A_1B_1 – перпендикуляры к прямой a. Опустим перпендикуляры $A'C'$ и A_1C_1 к b. Точки A' и A_1 лежат в одной полуплоскости относительно b, $A'C' \parallel A_1C_1 \Rightarrow$ точки A_1, C_1 лежат в одной полуплоскости относительно $A'C'$ и A', C' лежат в одной полуплоскости относительно $A_1C_1 \Rightarrow$

$A'A_1C_1C'$ – выпуклый четырёхугольник.

Так как $\dfrac{A'B'}{A'C'} = \dfrac{A_1B_1}{A_1C_1}$ и $A'B' = A_1B_1$, то $A'C' = A_1C_1$; кроме того $A'C' \parallel A_1C_1 \Rightarrow A'A_1C_1C'$

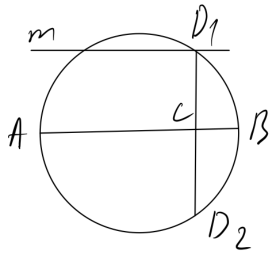
– параллелограмм $\Rightarrow A'A_1 \parallel b$, но $A'A_1 \parallel a \Rightarrow b \parallel a$, что противоречит условию. Значит, точка A' не принадлежит ГМТ. Для случая, когда A' лежит в других четвертях, надо взять точку A_1 на прямой c_2, далее доказательство аналогично.

123) Пусть P_2 – периметр искомого треугольника. Построим отрезок P_1, равный периметру данного треугольника ABC, и построим высоту h_1, опущенную на сторону AC треугольника ABC. С помощью этих трёх отрезков построим отрезок $h_2 = \dfrac{P_2h_1}{P_1}$.



Построим прямую, параллельную AC на расстоянии h_2 от неё в полуплоскости точки B и обозначим B_2 точку пересечения этой прямой с AB. Проведём $B_2C_2 \parallel BC$. Треугольник AB_2C_2 подобен треугольник ABC.

124) $a = \dfrac{x+y}{2}, b = \sqrt{xy}, a > b$.



– Построим отрезок $AB = 2a = x + y$.

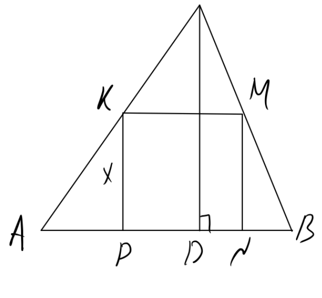
– На отрезке AB, как на диаметре, построим окружность.

– Проведём прямую $m \parallel AB$ на расстоянии, равном b от AB. Обозначим D_1 одну из точек пересечения прямой m с окружностью.

– Построим перпендикуляр D_1C к AB. Тогда либо $AC = x$ и $BC = y$, либо $AC = y$, $BC = x$.

<u>Доказательство</u>. 1. $x + y = AC + BC = AB = 2a$ по построению. 2. $AC \cdot BC = D_1C \cdot D_2C \Rightarrow xy = b^2$.

125) <u>Анализ</u>. Предположим, что искомый квадрат $KMNP$ уже построен.



Тогда $\Delta CKM \sim \Delta CAB \Rightarrow \dfrac{AB}{KM} = \dfrac{AC}{CK}$ (1)

Опустим высоту CD, тогда $\Delta KPA \sim \Delta CDA \Rightarrow \dfrac{CD}{KP} = \dfrac{AC}{AK}$ (2)

Обозначим сторону квадрата x, тогда $KM = x$, $KP = x$ и из (1) и (2) получаем: $AC \cdot x = AB \cdot CK$; $AC \cdot x = CD \cdot AK \Rightarrow$

$AB \cdot (AC - AK) = CD \cdot AK \Rightarrow AB \cdot AC - AB \cdot AK = CD \cdot AK \Rightarrow$

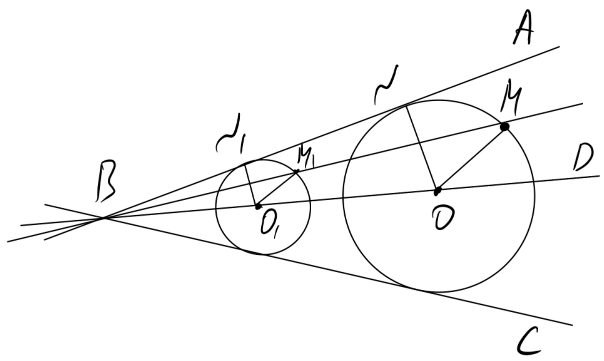
$AK = \dfrac{AB \cdot AC}{AB + CD}$.

<u>Построение</u>. – Построим высоту *CD* в ΔABC и построим $m = AB + CD$.

– Построим отрезок $AK = \dfrac{AB \cdot AC}{m}$ и отложим его от точки *A* на стороне *AC*.

– Проведём $KM \parallel AB$ и перпендикуляры *KP* и *MN*. Квадрат *KMNP* – искомый.

126) 1. *M* – данная точка, не лежащая на биссектрисе угла, *BA* и *BC* прямые.



– Построим биссектрису *BD* угла, образованного двумя прямыми. Центр вписанной в угол окружности будет лежать на *BD*.

– Построим произвольную окружность с центром *O* на *BD*, касающуюся данных прямых. N_1 – точка касания с прямой *BA*.

– Проведём прямую *BM* и обозначим M_1 одну из точек пересечения этой прямой с окружностями.

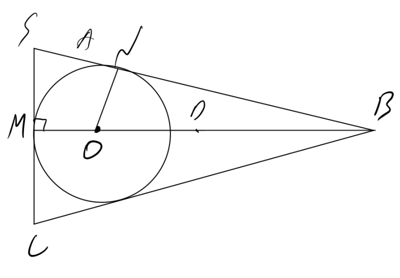
– Построим прямую, проходящую через точку *M*, параллельно M_1D_1. Обозначим *O* – точку пересечения этой прямой с *BD*. Окружность с центром *O* и радиусом *OM* – искомая.

<u>Доказательство</u>. Проведём перпендикуляр *ON* к *BA*.

$\Delta BOM \sim \Delta BO_1M_1 \Rightarrow \dfrac{OM}{O_1M_1} = \dfrac{BO}{BO_1}$; $\Delta BN_1O_1 \sim \Delta BNO \Rightarrow \dfrac{ON}{O_1N_1} = \dfrac{BO}{BO_1}$. Значит,

$\dfrac{OM}{O_1M_1} = \dfrac{ON}{O_1N_1}$. Так как $O_1N_1 = O_1M_1$, то $OM = ON \Rightarrow$ точка *N* лежит на окружности с радиусом *OM* и так как $ON \perp BA$, *BA* – касательная к окружности. Поскольку центр окружности лежит на биссектрисе, она касается и стороны *BC*.

<u>Исследование</u>. Так как прямая *BM* пересекает окружность O_1M_1 в двух точках, возможны два решения задачи. Взяв другую точку получим другой центр искомой окружности.



2. Пусть точка *M* лежит на биссектрисе *BD*. Проведём через *M* перпендикуляр к *BD* и обозначим *S* точку пересечения этого перпендикуляра с *BA*. Отложим на *BA* отрезок $SN = SM$.

Построим перпендикуляр в середине отрезка *MN* и обозначим *O* точку пересечения этого перпендикуляра с *BD*. Окружность с радиусом *OM* – искомая.

<u>Доказательство</u>. $OM = ON$ так как в треугольнике *MON* высота совпадает с медианой. Значит, точка *N* лежит на построенной окружности.

ΔSMN – равнобедренный $\Rightarrow \angle SMN = \angle SNM$;

ΔOMN – равнобедренный $\Rightarrow \angle NMO = \angle MNO;$

$\angle SMN + \angle NMO = 90° \Rightarrow \angle SMN + \angle MNO = 90° \Rightarrow ON \perp BA \Rightarrow$ BA касательная к окружности.

Здесь также возможны два решения в зависимости от того в какую сторону откладывать отрезок SN – в полуплоскость точки O или на дополнительной полупрямой.
Если точка M лежит на прямой BA или BC, решение ясно.

Вопросы к экзамену

Планиметрия I

1) Что изучает геометрия. Принадлежность и пересечение.
2) Отношение порядка. Отрезок.
3) Полуплоскость.
4) Полупрямая.
5) Теоремы-следствия теоремы 11.
6) Координаты.
7) Угол.
8) Откладывание углов. Равенство треугольников.
9) Параллельные прямые. Основные понятия аксиоматики.

Планиметрия II

1) Вертикальные углы. Перпендикулярные прямые.
2) Второй признак равенства треугольников. Равнобедренный треугольник.
3) Медиана, биссектриса и высота. Равносторонний треугольник. Третий признак равенства треугольников.
4) Соотношение между углами треугольника. Соотношение между углами треугольника и противолежащими сторонами.
5) Неравенство треугольника.
6) Углы и стороны прямоугольного треугольника. Равенство прямоугольных треугольников.
7) Перпендикуляр и наклонная.
8) Признаки параллельности прямых.
9) Сумма углов треугольника. Параллельные прямые как равноотстоящие прямые.
10) Выпуклые четырёхугольники.
11) Параллелограмм.
12) Прямоугольник. Ромб. Квадрат.
13) Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника. Точка пересечения медиан треугольника.
14) Трапеция.
15) Понятие движения. Свойства движения.

16) Симметрия относительно прямой. Симметрия относительно точки. Равенство фигур.
17) Параллельный перенос. Поворот.
18) Окружность и её свойства. Центральные углы.
19) Вписанные углы.
20) Вписанная и описанная окружности.
21) Первый признак подобия треугольников.
22) Второй и третий признаки подобия треугольников.
23) Пропорциональные отрезки в треугольнике.
24) Пропорциональность отрезков хорд и секущих. Пересечение прямой с окружностью.
25) Гомотетия. Подобие фигур.
26) Теорема Пифагора. Соотношения в косоугольном треугольнике.
27) Соотношения между диагоналями и сторонами параллелограмма. Существование треугольника с данными сторонами.
28) Взаимное расположение двух окружностей.
29) Инструменты построения. Основные задачи на построение.
30) Геометрическое место точек. Метод геометрических мест.

Приложение. Основные принципы логики

1) Правило вывода (Modus ponens): *если верно утверждение A и верно, что из A следует B, то верно B.*
2) Если доказано наличие некоторого свойства у произвольной точки фигуры, то это свойство присуще всем точкам фигуры, так как для любой из них можно повторить то же самое доказательство.
3) Закон исключённого третьего: *если ложно утверждение, противоположное данному, то данное утверждение истинно.*
4) Два утверждения P и Q эквивалентны, если из P следует Q и из Q следует P.
5) Вместо доказательства теоремы $P \Rightarrow Q$ можно доказать теорему $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
6) Для того, чтобы опровергнуть некоторое утверждение $P \Rightarrow Q$, достаточно привести к нему один контрпример, то есть доказать, что в каком-то случае $P \Rightarrow \neg Q$.